Instituto Superior de Educação
I. S. E

Trabalho cientifico do fim do curso apresentado ao I. S. E. Para obtenção do grau de licenciatura em matemática

Tema: <u>Guia para o estudo das sucessões</u>

12º **ano de escolaridade**

Orientador,
Doutor Paulino Fortes

Autor:
Alda Hortense M. Correia

Praia, Junho de 2007

Instituto Superior de Educação

Departamento de ciências e tecnologia

<u>Curso de Matemática</u>

<u>Trabalho cientifico:</u>

Guia para o estudo das sucessões
12º ano de escolaridade

<u>Elaborado por:</u>
Alda Hortense Mendes Correia e aprovado pelos membros do Júri. Foi homologado pelo conselho cientifico pedagógico, com o requisito parcial à obtenção do grau de:

Licenciatura em Matemática
Data:__________________

O Júri:

____

____

____

À minha família, professores e colegas que incentivaram-me a trabalhar nesse tema o meus agradecimentos.

Este trabalho é dedicado a todos aqueles que me rodeiam, principalmente as meninas Hannah, Helza e Hyrah, aos meus pais, às minhas irmãs, ao Clodomir, ao Doutor Paulino, à Ana Lina e à Lenine.

Índice

CAPÍTULO 1

Prefácio

Este trabalho, intitulado "Guia para o estudo das sucessões", pretende servir como guia ou manual de referência para professores e alunos do ensino secundário. Pois, o ensino da matemática pressupõe, além da formação académica adequada, um domínio próprio para o seu desempenho e preparar o indivíduo para enfrentar e resolver problemas da vida real.

Tendo em conta a grande importância das sucessões no mundo do trabalho, principalmente o financeiro, e a sua influência na tomada de decisões houve a preocupação na elaboração dum documento que possa servir como um manual de referência a alunos e professores do ensino secundário, bem como a todos os profissionais que utilizam as sucessões como ferramenta de trabalho.

Com o intuito de desenvolver a capacidade mental do leitor, introduziram-se exercícios resolvidos e exemplos ao longo do texto. A fim de facilitar a aprendizagem da matemática. Inseriram-se, também, alguns exercícios propostos como forma de o leitor testar o nível de conhecimentos adquirido.

Estamos convencidos que se se dominar este tema então a aprendizagem geral da disciplina terá mais sucesso - o que contribuirá certamente para o aumento da qualidade do ensino da matemática.

CAPÍTULO 2

Introdução

Um dos grandes objectivos do ensino da matemática, actualmente, é o desenvolvimento das capacidades de cálculo e de resolução de problemas. Uma vez que uma das grandes metas do ensino da matemática é contribuir para o aumento da capacidade de tomadas de decisão com fundamento matemático, portanto certas e optimizadas.

A sociedade de hoje, caracterizada por crescentes e rápidas alterações, necessita de indivíduos que pensem duma forma flexível, critica, eficaz e criativa. O poder matemático adquirido no estudo da matemática ajuda na preparação do cidadão activo do presente.

Neste caso, as sucessões numéricas, além de terem influência no que foi dito acima, constituem uma classe importante das funções reais e estão na fundamentação de vários conceitos da matemática: desde a própria criação do corpo dos números reais aos métodos aproximativos em geral. Também, servem para modelar vários problemas e enigmas matemáticos e da vida real. Daí a preocupação na elaboração deste manual de referencia para quem se interesse pelo tema.

A preocupação na elaboração deste documento de apoio não fica somente limitada na introdução do estudo das sucessões, mas, principalmente pensou-se na contribuição que este venha a ter na assimilação e estudo de outras cadeiras onde são aplicadas diversos tipos de sucessões e valores aproximados. A estatística, a matemática financeira, de entre outros, cujas aplicações dependem directamente das sucessões, tem influência e de que maneira na sociedade e na tomada de decisões. Na estatística, em especial, o indivíduo terá que aplicar as funções certas principalmente na previsão do crescimento populacional afim de prever e encontrar soluções na demografia futura.

Este manual contém alguns enigmas (relacionados com a realidade e que possam servir de estimulo) por resolver, exercícios resolvidos que podem contribuir na compreensão e aprendizagem desta matéria, dicas para a resolução de certas sucessões, alguns problemas que podem ser encontradas no dia a dia e alguns teoremas demonstrados através de exercícios resolvidos e propostos onde o leitor é conduzido a demonstra-los. No fim de cada capítulo encontram-se vários exercícios de aplicações para serem resolvidos em grupo e desencadearem novas questões. Também, foi abordado de forma sintética algumas sucessões consideradas importantes e breve introdução ao logaritmo de forma a haver maior compreensão da função logarítmica.

Os enigmas foram introduzidos com o objectivo de tonar os alunos mais pacientes, aumentar a rapidez do raciocínio lógico matemático e encontrar a melhor forma de resolvê-los. Para isso, seria conveniente lê-los, ler o livro e resolvê-los ou então resolvê-los e comparar os resultados encontrados após a leitura do manual.

Tendo em conta a limitação do mercado em que estamos inseridos, além dos objectivos apresentados anteriormente, este documento visa complementar o adquirido na sala de aula e servir como documento de apoio/consulta pois, o ensino da matemática pressupõe uma formação académica adequada e um domínio para o seu desempenho.

Considerando os objectivos anteriormente apontados, surge a seguinte hipótese:

- Se um indivíduo dominar alguns conteúdos matemáticos, principalmente o deste manual, e aplicá-lo adequadamente então se melhoraria a qualidade do mundo laboral.

Com certeza o leitor vai confirmar esta hipótese.

O trabalho consta de oito capítulos. No primeiro capítulo falou-se dum pouco de História, o que facilitará a comprensão desta matéria. No segundo, a fim de despertar a curiosidade do leitor, apresentou-se alguns enigmas não resividos, nos terceiros a sexto capitulos tratou-se de abordar as progressões aritméticas, progressões geométricas, algumas sucessões já conhecidas, da convergência, do limite de sucessões, e nos dois ultimos capítulos trabalhou-se algumas séries e algumas sucessões consideradas úteis e fez-se a introdução ao logaritmo.

Finalmente, queria explicar algumas opções tomadas: optou-se por um texto leve, arejado (o que aumentou grandemente o número de páginas) com o objectivo de produzir um texto não cansativo, de fácil referência, mas que caiba também os apontamentos rabiscados pelo próprio leitor; também optou-se por introduzir vários temas através da proposta de exercícios, como forma de motivar à partida para a problemática em questão.

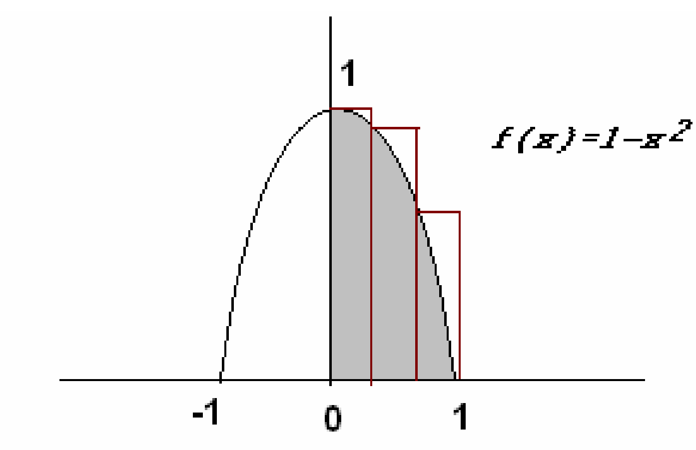
CAPÍTULO 3

Breve nota histórica

O termo sucessão ou sequência está relacionado com um conjunto de objectos dispostos numa dada ordem. Porém na antiguidade, o estudo de sequências foi aplicada no cálculo dos valores aproximados de:

- Áreas

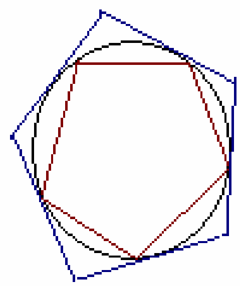
Neste caso, é aplicado ao cálculo da área do segmento duma parábola, duma circunferência, etc. (observe a figura abaixo)



Para poder encontrar o valor aproximado dessa área, os matemáticos da antiguidade dividiam o intervalo em n partes iguais e consideravam pelo menos duas sucessões tal que $u_n < A < v_n$ onde A representa a área e u_n e v_n são sucessões crescente e decrescente respectivamente. Assim, a área será o limite de cada uma dessas sucessões encontradas.

- Do número π

Encontram o valor aproximado de π através do cálculo do perímetro de polígonos regulares inscritos e circunscritos numa circunferência de comprimento π e diâmetro a unidade (n representa o número de lados do polígono).



De acordo com a figura acima representada o valor aproximado de π depende do perímetro dos dois pentágonos.

- De $\sqrt[k]{p}$

Este valor é calculado fixando o valor de x_1. Para qualquer real x_1 o valor de $\sqrt[k]{p}$ está situado entre x_1 e $\frac{p}{x1}$ onde

$$x_n = \frac{1}{k}\left[(k-1)x_{n-1} + \frac{p}{(x_{n-1})^{k-1}}\right].$$

- Um real qualquer

O valor aproximado de a/b pertence ao intervalo $]u_n, v_n[$ onde a primeira sucessão é crescente e a segunda decrescente, representando os valores arredondados por defeito e por excesso respectivamente.

Isto permitiu que se descobrisse bem a regra de certas sucessões como a das sucessões geométricas e sucessões formadas pela soma dos n primeiros termos duma progressão geométrica (Arquimedes, 287-212 a.c.) foram introduzidos na previsão do tamanho da população tendo em conta a taxa de fecundidade, das sucessões aritméticas que está directamente, quando maior for o n, ligada à estrutura do conjunto dos números reais e o resultado deste é o axioma de Arquimedes. Este foi uma das razoes pela qual Arquimedes fora considerado fundador da estatística, do cálculo integral e da análise infinitésimal.

Além de Arquimédes, outros matemáticos se interessaram pelo estudo de certas sucessões. Em particular, Leonardo de Pisa mais conhecido por

Fibonacci (1170-1245) cujo o nome ficou ligado a uma das sucessões mais célebres da história da matemática: esta estuda o crescimento populacional dos coelhos (enigma 5), Taylor (1685-1675), Euler (1707-1783) e Cauchy (1789-1857).

Existem outros matemáticos que deram o seu contributo no estudo de sucessões mas não serão citados neste manual. Pois, o objectivo é incentivar o aluno a pesquisar o que foi feito por eles e pelos que foram citados no parágrafo anterior.

CAPÍTULO 4

Enigmas

A exploração didáctica, e mesmo científica, de enigmas é uma estratégia bastante rica uma vez que:

i) É motivadora pois um enigma traz sempre uma forma interessante, por vezes até lúdica de apresentar um problema;

ii) É integradora pois a maior parte dos enigmas abarca vários aspectos de uma matéria e até várias matérias;

iii) É completa pois leva ao hábito de análise, sintese e outras estratégias de resolução de problemas.

Por isso, apresentamos abaixo alguns enigmas envolvendo o conceito de sucessão, com vista a constituir uma fonte de recurso aos professores e curiosos:

1. Timóteo hesita entre duas firmas que lhe propõe trabalho. A primeira oferece-lhe 180 contos por ano com a promessa dum aumento de 10 contos por semestre. A segunda oferece-lhe 180 contos por ano com a promessa dum aumento de 40 contos por ano. Depois de muito pensar, Timóteo escolheu a primeira firma. Porquê?

2. Um governo decide apenas emitir duas moedas de valor diferente: uma de 7 unidades monetárias e outra de 11. Assim, somas como 15 unidades não podem ser obtidas de maneira exacta. Qual é a maior quantia que não pode ser paga com qualquer combinação das duas moedas?

3. Timóteo comprou uma balança com dois pratos, mas sem pesos. Então resolveu fazê-los, cortando em vários pedaços uma barra de 121g. Obteve, assim, um sistema que lhe permite pesar exactamente todos os objectos que pesem um número inteiro de gramas de 1 a 121. Como dividiu Timóteo a barra? Quantos pedaços são necessários?

4. Calvin: Hobbes, ajudas-me nos TPC?

Hobbes: Diz.

Calvin: Hobbes, prova, por indução que a soma dos primeiros n números naturais é $\frac{n(n+1)}{2}$.

5. Cerca de 1200, Leonardo de Pisa colocou a questão de saber quantos casais de coelho se produzem num ano a partir dum casal se não ocorrerem mortes e cada casal originar um novo casal em cada mês, casal que se torna fértil a partir do segundo mês. Leonardo não fez mais do que colocar o problema e dar a resposta: 377.

6. Suponha o leitor que, andando para trás no tempo, encontra em média uma nova geração de antepassados por cada 25 anos que recua. Então, há 25 anos tinha 2 antepassados, os seus pais; há 50 anos tinha 4 antepassados, os seus avós; há 75 anos tinha 8 antepassados, os seus bisavôs e assim por diante, duplicando os 25 anos. Este argumento parece sugerir que há 2000 anos teria tido 2^{80} antepassados, um número de longe superior ao número total de pessoas que já alguma vez existiram. Onde falha o argumento?

7. Um relógio bate as 6 em 5 segundos. Quanto tempo demora bater as 12?

8. Encontre números naturais x, y, z tais que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{5}$, em que $x<y<z$. Poderá surpreendê-lo o número de soluções que existem.

9. O orgulho e a alegria de Mustafá eram os seus 11 bois brancos. Após a sua morte, a sua mulher principal fez saber que o seu falecido marido queria os 11 bois partilhados entre os seus filhos mais velhos, Yusuf, Raheem e Ibrahim, de modo que ficassem com $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$, respectivamente. Não querendo ter de acabar por talhar um daqueles belos animais, foram consultar o oráculo da aldeia. Este depressa acabou com os problemas daquela família, acrescentando o seu único boi aos 11 outros. Depois entregou 6 ao Yusuf, 3 ao Raheem, 2 ao Ibrahim e, finalmente, tirou de volta o seu próprio! Há aqui qualquer coisa que não bate certo. Conseguirá o leitor deslindar o caso?

10. Suponha que possui muitos selos de correio de 10 e 20 escudos. De quantas formas diferentes pode colar os selos num bilhete-postal (lado a lado e direitos) para totalizarem 10, 20, 30, 40, 50, etc., escudos? Por exemplo, para totalizar 40 escudos são possíveis cinco combinações.

CAPÍTULO 5

Sucessões; sucessões numéricas

5.1 Definições e exemplos

Vai-se iniciar apresentando exemplos de sucessões e problemas que geram sucessões.

Exemplo 5.1 *A disposição abaixo é uma sucessão:*
$2, 10, 50, 0, 100, -3, -4, -5, 535, 15, 200, 3$

Exemplo 5.2 *Supondo que a taxa anual de aumento dos preços é de 8%, isto é se um produto que custa 100 escudos este ano, no próximo custará* $100 + \frac{8}{100} \times 100$*, etc. Seja* v_n *o preço desse mesmo produto ao longo de* n *anos. Calcule o valor aproximado de* v_n *a 0.01, para* $n \in \{1, 2, 3, 5\}$ *.*

Solução:

$$\begin{aligned}
n = 1 &\Rightarrow v_1 = 100 + \tfrac{8}{100} \times 100 = 108 \\
n = 2 &\Rightarrow v_2 = 108 + \tfrac{8}{100} \times 108 = 116.64 \\
n = 3 &\Rightarrow v_3 = 125.9712 \approx 125.97 \\
n = 5 &\Rightarrow v_5 \approx 147.02
\end{aligned}$$

Exemplo 5.3 *Considere-se a função* $f(x) = \frac{2x-5}{x+1}$*. Para todo o inteiro natural* n*,* $u_n = f(n)$*.*

O organograma abaixo indicado resume os cálculos efecutados para calcular os valores de u_n *para todo* n *inteiro natural menor do que 50.*

Definição 5.1 (sucessão) *Seja* a *um inteiro natural. Designa-se por* $\mathbb{N}_a = \{a, a+1, a+2, ...\}$ *de naturais maiores ou iguais a* a*. Chama-se sucessão*

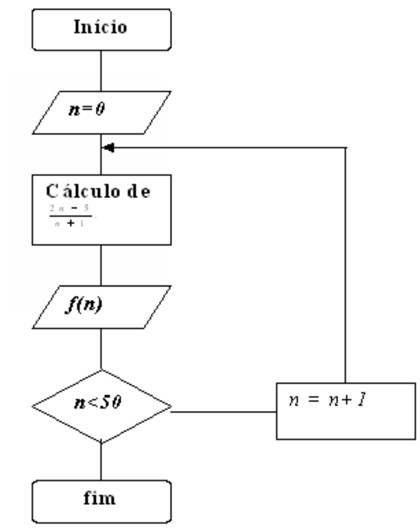


Figura 5.1:

numérica uma aplicação de $\mathbb{N}_a$ *em* $\mathbb{R}$. *Onde* $u(n)$ *a imagem de* n, *nota-se da seguinte forma:* u_n.

O real u_n *é um termo da sucessão; neste caso, é o termo de ordem* n.

O termo u_a *é o primeiro termo da sucessão.*

E, $u = (u_n)_{n \geq a}$ *ou* $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}_a}$ *representa a sucessão* u.

Nota 5.1 *Quando* $a = 0$ *a sucessão pode ser representada das seguintes maneiras:* $(u_n) = (u_n)_{n \geq 0}$ *ou* $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

Nota 5.2 *Às vezes, para precisar a forma dos termos sucessivos, a sucessão é notada da seguinte forma:*

$(u_n)_{n \geq a} = (u_a, u_{a+1}, ..., u_n, ...)$.

Exemplo 5.4 *Tomemos como exemplo a sucessão* $u = \frac{1}{n}$*para todo inteiro não nulo. Esta sucessão será representada da seguinte forma:* $(\frac{1}{n})_{n \geq 1} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...)$. *Podemos, também, encontrar a notação seguinte:*$\left(\frac{1}{n}\right)$, *isto é devido ao facto do mesmo não ser definido em* $n = 0$ *conseqüentemente o primeiro termo jamais pode ser nulo.*

Nota 5.3 *Representa-se uma sucessão finita da seguinte forma:* $(u_n)_{a \preceq n \preceq b} = (u_a, u_{a+1}, ..., u_b)$.

Nota 5.4 *É importante saber determinar a posição dum termo. Por exemplo, $u_a + 3$ é o quarto termo da sucessão $(u_n)_{n\geq a}$*

Nota 5.5 *As sucessões são representadas, na maioria das vezes, por: $u, v, w, ...$*

Nota 5.6 *A definição de sucessão de elementos de A, podendo X ser igual a $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_a$ ou $X = \{n \in \mathbb{N} : a < n < b, a, b \in \mathbb{N}\}$ representa-se da seguinte forma: U_n: $X \subset\mathbb{N} \to A$*

Exemplo 5.5 *A sucessão u definida por*

$$u(n) = \frac{1}{n(n-1)}$$

pode ser representada das seguintes maneiras:

$$u = \left(\frac{1}{n(n-1)}\right)_{n\geq 2} = \left(\frac{1}{n(n-1)}\right) = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{6};\frac{1}{12};...;\frac{1}{n(n-1)};.....\right)$$

$$v = \left(\frac{1}{n(n-1)}\right)_{n\geq 5} = \left(\frac{1}{20};\frac{1}{30};\frac{1}{42};...;\frac{1}{n(n-1)};...\right)$$

■

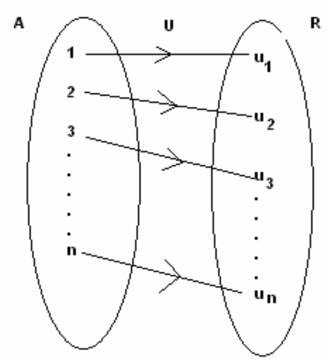
Como para qualquer função a definição de uma sucessão depende do domínio, conjunto de chegada e o processo de transformar objectos em imagens. Assim definir uma sucessão consiste em fornecer meios para calcular os seus termos. Há várias formas de encontrar uma sucessão:

a) Dando uma fórmula que permite calcular a imagem de n. Recorrer-se-á sempre que possível a este método.

b) O meio de cálculo do termo geral (termo de índice n) pode ser encontrado através dos termos inferiores. Neste caso, o conhecimento dos primeiros termos permitirá calcular todos os termos da sucessão. Diz-se que o termo geral da sucessão é encontrado por recorrência, e que a sucessão está definida por recorrência;

c) Existem outras formas de encontrar o termo geral da sucessão. Como por exemplo através de organogramas, ou combinar entre elas sucessões já conhecidas.

Nota 5.7 *Seja (u_n) a sucessão tal que $u_n = f(n)$, onde f é uma função numérica. Se n é definido em D_f logo o termo geral de o é também.*



b) Seja (v_n) definida por v_a e a recorrência $v_{n+1} = f(v_n)$. O termo v_{n+1} é definido se e só se $v_n \in D_f$.

Passemos a apresentar alguns exemplos:

Exemplo 5.6 *Sendo (u_n) definida pela relação*

$$u_n = \sqrt{u_{n-1}}$$

e $u_0 = 16$. Logo tem-se sucessivamente: $u_1 = 4$; $u_2 = 2$; $u_3 =$; etc.

Exemplo 5.7 *Seja a sucessão $(v_n)_{n\geq 1}$. Para satisfazer a relação de recorrência*

$$v_n = v_{n-1} + \frac{1}{v_{n-2}}$$

ter-se-á que conhecer v_1 e v_2 para a definir a sucessão. Se $v_1 = v_2 = 1$ então: $v_3 = 2$; $v_4 = 3$; $v_5 =$; etc.

Exemplo 5.8 *Seja*

$$u_n = u_{n-1} + 3$$

e . O termo geral desta sucessão é

$$u_n = 2 + 3(n-1) = 3n - 1 .$$

Ela foi encontrada por recorrência. Entretanto, este processo nem sempre é possível.

5.1.1 Exercícios de aplicação:

Exercício 5.1 *Sejam:*

$$u_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$v_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

e

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

a) *Calcule* u_n, v_n *e* w_n *para 0*
b) *Calcule* u_{2n}, v_{2n} *e* w_{2n}.
c) *Calcule* u_{n-2}, v_{n-2} *e* w_{2n-1} .
d) *Calcule* $u_{n+1} - u_n$, $v_{n+1} - v_n$ *e* $w_{n+1} - w_n$. *Conclua.*

Exercício 5.2 *Seja:*

$$u_n = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Calcule u_8 *para* $q = \frac{1}{3}$.
Calcule u_8 *para* -3.
Para $q = 2$, *calcule* $u_n : 0 \leq un \leq 10$.

Exercício 5.3 *Seja* $f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

e $u_n : u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Dado $u_0 = -1$, *calcule* u_n *:* $0 \leq n \leq 10$. *Comente. Deduza os valores de* u_{52} *e* u_{111}.

b) O mesmo para $u_0 = 3$ *.*

c) Demonstre que, para qualquer que seja os valores de u_0 *(excepto* $\{0, 1\}$*) os valores de* u_0 *e* u_1 *são iguais.*

d) Seja

$$v_n : v_{n+1} = \sqrt{v_n + \sqrt{v_{n-1}}} .$$

Calcule v_n *(*$n \in \{2, 3, 4\}$ *) em que* $v_0 = 256$ *e* $v_1 = 9$*.*

Exercício 5.4 *Seja* $(u_n) : u_n = nu_{n-1} - (n-1)!$ *Calcule* u_2*,* u_3*,* u_4 *e* u_5 *(considerando* $u_1 = 1$*).*

5.2 Monotonia

Recorde-se que um par formado por um conjunto A e uma relação $<$ em A, $(A, >)$ diz-se bem ordenado se, e só se, tem-se um e um só dos casos: $x < y$, $y < x$ e $x = y$ (propriedade tricotómica).

Um subconjunto A de $\mathbb{N}$ é conjunto indutivo se, e só se:

$$1 \in A \wedge \forall a \in A , a + 1 \in A .$$

Proposição 5.1 *Para que uma sucessão seja crescente é necessário que:*
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$

Demonstração:
Seja u uma sucessão. Seja $a = \{m \in \mathbb{N} : u_n \leq u_{n+m}\}$

$$\begin{array}{rcl} 1, 2 & \in & \mathbb{N}, 1 \leq 2 \Rightarrow u_1 \leq u_2 \\ 2, 3 & \in & \mathbb{N}, 2 \leq 3 \Rightarrow u_2 \leq u_3 \\ & \vdots & \\ p, p+1 & \in & N, u_p \leq u_{p+1} \\ & \vdots & \\ n, m & \in & N, u_n \leq u_{n+m} \end{array}$$

Como $(\mathbb{N}, \leq)$ e $(\mathbb{R}, \leq)$ são conjuntos bem ordenados então tem-se:

Definição 5.2 *Diz-se que uma sucessão u é crescente se e só se:*
$\forall n \in \mathbb{N}$*,* $m \in \mathbb{N}, n \leq m \Rightarrow u_n \leq u_m$
e, decrescente quando:
$\forall n \in \mathbb{N}$ *,* $m \in \mathbb{N}, n \leq m \Rightarrow u_n \geq u_m$

Sendo $\mathbb{N}$ um conjunto totalmente ordenado e a A um subconjunto indutivo de $\mathbb{N}$ logo, pelo teorema:

Corolário 5.1 *Se A é totalmente ordenado e $B \subset A$, então B é totalmente ordenado.*

Por isso A é um conjunto bem ordenado ou seja o conjunto dos termos de uma sucessão é bem ordenado.

Exemplo 5.9 *Seja $m = \{2, 4, 6, 8, ..., 2n, ...\}$ é um subconjunto de $\mathbb{N}$ totalmente ordenado. Logo o conjunto dos termos da sucessão u_n,*

$$\{(u_n)_{n \in N}\} = \{x \in R : \exists n \in N \wedge x = 2n\}$$

n é totalmente ordenado.

Definição 5.3 *Diz-se que uma sucessão é crescente, a partir do termo n_b se, e só se, para qualquer inteiro $n \geq n_b$, tem-se $u_{n+1} \geq u_n$.*

Uma sucessão é decrescente, a partir de n_b se, e só se, para qualquer inteiro $n \geq n_b$, tem-se $u_{n+1} \leq u_n$.

Uma sucessão é constante, ou estacionária, a partir de n_b se, e só se, para qualquer inteiro $n \geq n_b$, tem-se $u_{n+1} = u_n$.

Definição 5.4 (sucessão monótona) *Uma sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diz-se monótona quando ela for crescente ou decrescente.*

Conforme o quadro abaixo indicado, uma sucessão monótona pode ser:

monótona \ em sentido	estrito	lato
crescente	$\forall n \in N, Un+1 > Un$	$\forall n \in N, Un+1 \geq Un$
decrescente	$\forall n \in N, Un+1 < Un$	$\forall n \in N, Un+1 \leq Un$

Exemplo 5.10 *Para qualquer $a \in \mathbb{R}$, a sucessão $u_n : u_n. = a_{n+b}$ é monótona crescente se a for positivo e decrescente se a for negativo.*

Exemplo 5.11 *$v_n : v_n = (-1)^n$ não é nem crescente nem decrescente. Neste caso a sucessão não é monótona.*

Assim, do ponto de vista práctico, para estudar a monotonia duma sucessão é necessário:

- Comparar dois termos consecutivos da sucessão dada;
- Estudar o sinal da diferença entre dois termos consecutivos;
- No caso, da sucessão ter apenas termos positivos, pode-se fazer o quociente entre o dois termos consecutivos comparando o resultado com a unidade. Nesse caso

$$u_{n+1} - u_n \geq 0$$

e

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$$

são equivalentes.

Exemplo 5.12 *Seja (u_n) definida por $u_{n+1} = u_n + 2$ e $u_0 = -5$. Comparando os seus termos consecutivos, o que se pode concluir?*

Por recorrência encontramos o termo geral da sucessão dada:
$u_0 = -5; u_1 = -3; ...; u_n = u_{n-1+2}$
$u_0 = -5 + 2 \times 0$
$u_1 = -5 + 2 \times 1 = -3$
...
$u_p = -5 + 2 \times p$
Tem-se então:

$$\forall n \in N, u_n = -5 + 2n$$

$$u_{n+1} - u_n = -5 + 2(n+1) + 5 - 2n = 2n - 2n + 2 = 2 \geq 0.$$

Logo a sucessão dada é estritamente crescente.

Exemplo 5.13 *Seja (v_n) definida por*

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$$

e

$$v_0 = -12.$$

Tem-se

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2} v_n - v_n = -\frac{1}{2} v_n$$

O sinal de da subtracção depende do sinal de v_n. Ora é negativo então os termos sucessivos também o são, consequentemente a diferença entre os termos consecutivos é positiva. Logo, para todo n natural a sucessão dada é crescente.

Exemplo 5.14 *Seja $(u_n)_{n \geq 1}$ uma sucessão de termos positivos definida por:*

$$u_n = \frac{2^n}{n^4}$$

Sabe-se que para estudar a monotonia desta sucessão, calcula-se a diferença entre dos termos consecutivos:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^4} - \frac{2^n}{n^4} = 2^n \left(\frac{2}{(n+1)^4} - \frac{1}{n^4} \right)$$

Neste caso não se consegue chegar a nenhuma conclusão. Por isso, é preferível analisar o quociente da divisão entre os termos consecutivos:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2\left(\frac{n}{n+1} \right)^4 = q_n$$

Calculando sucessivamente os valores de q_n obter-se-ão os seguintes resultados:

$$q_1 = \frac{1}{8}; q_2 = 0{,}4; q_3 = 0{,}63; q_4 = 0{,}82; q_5 = 0{,}96; q_6 = 1{,}08$$

Para $n \geq 6$ quociente torna-se maior do que a unidade. Logo, a sucessão é crescente a partir de u_6.

Exemplo 5.15 *Seja v_n definida por:*

$$v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n}$$

e $v_0 = 1$. *Tem-se*

$$v_{n+1} - v_n = \sqrt{2+v_n} - v_n = \frac{\left(\sqrt{2+v_n} - v_n\right)\left(\sqrt{2+v_n} + v_n\right)}{\sqrt{2+v_n} + v_n} = \frac{2+v_n - v_n^2}{\sqrt{2+v_n} + v_n}.$$

Ora, $\sqrt{2+v_n} - v_n \geq 0$ *então o sinal* $v_{n+1} - v_n$ *de depende do de* $2 + v_n - v_n^2$ *.Considere-se então o polinómio* $P(x)$ *definido por*

$$P(x) = 2 + x - x^2 = (1+x)(2-x)$$

e

$$P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1,2].$$

Agora, ter-se-à que provar que :

$$v_n, v_{n+1} \in]0,2[.$$

Tem-se sucessivamente:

$$0 < v_n < 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2 < 2 + v_n < 4$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2} < \sqrt{2+v_n} < 2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2} < v_{n+1} < 2 \Leftrightarrow 0 < v_{n+1} < 2 \; v_n \in]0,2[.$$

Então

$$v_n \in]-1,2[.$$

Deduz-se que para qualquer n *natural,* v_n *é crescente.*

Exemplo 5.16 *Seja*

$$u_n : u_n = -n + 1.$$

Ora

$$u_{n+1} - u_n \Leftrightarrow -n - 1 + 1 + n - 1 = -1 \leq 0.$$

Logo a sucessão é decrescente.

Definição 5.5 *Diz-se que a sucessão* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é constante quando, para qualquer* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.

Exemplo 5.17 *A sucessão* $(u_n) = 2, \forall n \in N$, 2.2.2...2... *é constante.*

Definição 5.6 *A sucessão* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *é estacionária se:* $\exists p : \forall n \in \mathbb{N} \wedge n \geq p, u_{n+1} = u_n$. *Ou seja a partir duma certa ordem* n, $u_{n+1} = u_n$.

Exemplo 5.18 *A sucessão* 1.2.3.4.4.4.4...4...

Exercícios:

Exercício 5.5 *Estude a monotonia das seguintes sucessões:*

a) $u_n = n^2 + n + 1$
b) $u_n = \frac{n+1}{n+2}$
c) $u_n = \frac{(1{,}5)^n}{n^6}$
d) $u_n = \frac{2^n}{n!}$
e) $u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}$, $u_0 = u_1 = 1$
f) $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$, $u_0 = 1$
g) $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$, $u_0 = 4$

Exercício 5.6 *Escreva duas sucessões não são monótonas, sendo uma de termos positivos.*

De entre as sucessões não monótonas, existem sucessões de termos que se repetem periodicamente. Estas serão o objecto de estudo na próxima secção.

5.3 Sucessões Periódicas

Definição 5.7 *Diz-se que uma sucessão é periódica de período* t *(*$t \in \mathbb{N}$ *) se:*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+t} = u_n.$$

Definição 5.8 *Uma sucessão* (u_n) *é periódica a partir do termo* n_0, *se e só se, existe uma ordem*

$$p \in N, \forall n \geq n_0 : u_{n+p} = u_n \, .$$

O menor p *com esta propriedade é dito o período da sucessão dada.*

Vamos ver alguns exemplos:

Exemplo 5.19 *Seja (u) uma sucessão definida em* $\mathbb{N}$ *por:* $u_n = \sin(\pi/2 + n\pi)$*.*

Mostre que se trata duma sucessão periódica.

Resolução:

Se n par, $n = 2p$ *para* $n \in \mathbb{N}$

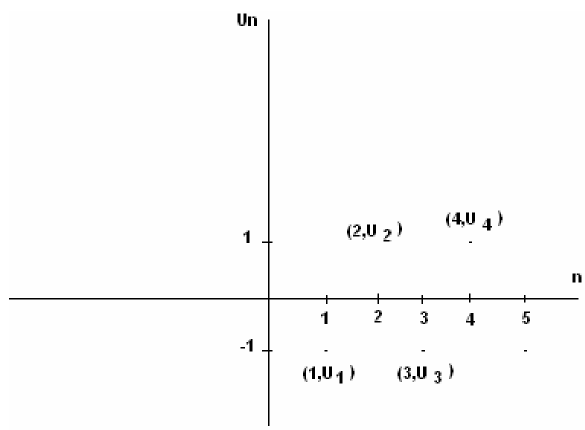
$$\begin{aligned} u_n &= \sin(\pi/2 + n\pi) = \sin(\pi/2)cos(2p\pi) + sin(2p\pi)cos(\pi/2) \\ &= 1x1 + 0x0 = 1 \end{aligned}$$

Se n ímpar, $n = 2p + 1$ *para* $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_n &= sin(\pi/2 + (2p+1)\pi) == sin(\pi/2 + 2p\pi + \pi) = \\ &= sin(\pi/2 + \pi) == sin(3\pi/2) == -1 \end{aligned}$$

Então para $n \in \mathbb{N}$ *temos* $u_n = (-1)^n$

$u_{n+2} = (-1)^{n+2} = (-1)^n(-1)^2 = (-1)^n = u_n$ *pela definição* $t = 2$*. Logo a sucessão dada é uma sucessão periódica de período 2. Para compreendermos melhor, observemos a figura seguinte:*



Observando a figura acima concluímos que de 2 em 2 a imagem de n mantém-se, daí o 2 ser o período da sucessão.

5.4 Propriedades algébricas e topológicas das sucessões

Nesta secção vamos estudar a estrutura algébrica do conjunto das sucessões. Seja $\mathbb{K}$ é um corpo e E um conjunto qualquer. Seja $\mathbb{K}^E$ o conjunto das funções de E em $\mathbb{K}$. $\mathbb{K}^E$ tem a estrutura dum espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. No caso das sucessões numéricas $u_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, como $\mathbb{R}$ é um corpo e $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é um espaço vectorial real então têm-se as operações com sucessões:

5.4.1 Operações com sucessões

Definição 5.9 *A adição de duas sucessões u e v é:*

$$(u+v)_n = u_n + v_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Definição 5.10 *Ao multiplicar uma sucessão u por um real β tem-se:*

$$(\beta u)_n = \beta u_n$$

Exemplo 5.20 *Seja $u_n = (-1)^n(1-n-1)$ e $v_n = (-1)^{n+1}(2-n-1)$. Determinar $u+v$.*

Resolução:
$\forall n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n(1-n-1) + (-1)^{n+1}(2-n-1) =$
para n par
$1-n-1-2+n-1=-1$
para n ímpar
$-1+n-1+2-n-1=1$
logo $v+u=(-1)^{n+1}$

Exemplo 5.21 *Sendo β um real qualquer, mostre que multiplicando a sucessão anterior por este real, o mesmo obedece à segunda regra.*

Resolução: $\beta u_n = \beta(-1)^n(1-n-1) = (-1)^n(\beta - \beta n^{-1}) = (\beta u)_n$.

5.4.2 Estrutura de anel unitário

Mantendo a adição, a multiplicação em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é definida da seguinte forma: $(uv)_n = u_n v_n, \forall n$.

Proposição 5.2 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *, munido das operações de adição e multiplicação acima, tem a estrutura de anel unitário.*

Demonstração:
$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +)$ é grupo comutativo?
Seja $u_n, v_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Tem-se que

$$\forall u_n, v_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \exists^1 w_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : w_n = u_n + v_n$$

graças à definição de adição de sucessões, a partir da soma dos termos correspondentes.

Assim, $+$ é associativa, pois a adição em $\mathbb{R}$ o é.
Existe elemento neutro, e é a sucessão constante 0 (zero): $u_n = 0, \forall n$.
Toda sucessão (u_n) têm oposto: $-(u_n) = -u_n, \forall n$ natural.
A operação $(+)$ também é comutativa:

$$\begin{aligned} u_n + v_n &= u_1 + u_2 + ... + u_n + v_1 + v_2 + ... + v_n = \\ &= (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + ... + (u_n + v_n) \\ &= (v_1 + u_1) + (v_2 + u_2) + ... + (v_n + u_n) \\ &= (v_1 + v_2 + ... + v_n) + (u_1 + u_2 + ... + u_n) \\ &= v_n + u_n \end{aligned}$$

logo $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +)$ é grupo comutativo.

$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \times)$ é semi-grupo?

$$\forall un, vn \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \; \exists^1 w_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : w_n = u_n v_n = (uv)_n$$

$$\begin{aligned} \forall u_n, v_n, w_n &\in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} (u_n v_n) w_n = (uv)_n w_n = (uvw)_n = \\ &= u_n (vw)_n \end{aligned}$$

como a operação multiplicação é associativa então $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \times)$ é um semi-grupo.

Será a operação $\times$ distributiva em relação à $+$?
$\forall u_n, v_n, w_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} (u_n + v_n) w_n = (u + v)_n w_n = [(u + v)w]_n$
$= (uw)_n + (vw)_n$
$= u_n w_n + v_n w_n$
então a operação $\times$ é distributiva em relação à operação $+$. Tendo em conta que a operação $\times$ é comutativa, então:

$$(u_n + v_n) w_n = w_n (u_n + v_n)$$

o elemento unidade é a sucessão constante 1.

$$1u_n = (1u)_n = u_n$$

logo $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ munido das operações + e × é um anel unitário.

Exercício 5.7 *Em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, dê um exemplo de divisores de zero.*

Solução:

Seja $u_n = u_1, u_2, ..., u_n, ...$ e $v_n = 0, 0, 1, 0, ..., 0, ...$ Então $(uv)_n = 0, 0, 0, ...$

Nota 5.8 *O conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ munido da estrutura vectorial e da multiplicação é uma álgebra.*

5.4.3 Propriedade topológicas

$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \leq)$ é um conjunto ordenado.

Definição 5.11 *Seja u e v duas sucessões de números reais. Diz-se que u é minorante de v ou que v é majorante de u se e só se:*

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq v_n.$$

O estudo da sucessão

$$v_{n+1} = \sqrt{2+v_n}$$

$$v_0 = 1$$

mostrou que, às vezes, é necessário saber a que intervalo a sucessão pertence.

Definição 5.12 *Uma sucessão $(u_n)_{n\geq a}$ é majorada (resp. minorada) se, e só se, existe um real M (resp. m) tal que, para todo o índice n natural: $u_n \leq M$ (resp. $u_n \leq m$). Neste caso, M (resp, m) é majorante (resp. minorante) da sucessão dada.*

Definição 5.13 *Uma sucessão é limitada se for minorada e majorada.*

Proposição 5.3 *Dada duas sucessões $(u_n)_{n\geq a}$ e $(v_n)_{n\geq b}$, se existe um inteiro p:*

$$\forall m \in N, m > p : u_n \leq v_n ,$$

então a sucessão $(u_n)_{n\geq a}$ é majorada pela sucessão $(v_n)_{n\geq b}$ a partir de p (ou o inverso).

Corolário 5.2 *$E \subset \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ é ponto aderente de E se, e só se:*

$$\forall \varepsilon > 0]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap E \neq \{\}.$$

Um ponto a aderente de E é ponto de acumulação de E se, e só se, a é aderente de $E \backslash \{a\}$.

Exemplo 5.22 *A sucessão*

$$u_n = \frac{1}{n^2+n-10}$$

é majorada por que sucessão?

Note-se que o polinómio n^2+n-10 (sendo n natural) é sempre positivo.

$$n^2+n-10 > n^2 \Leftrightarrow \frac{1}{n^2+n-10} < \frac{1}{n^2}.$$

Para que $\frac{1}{n^2}$ seja majorante da sucessão é necessário igualar os seus denominadores. Logo:

$$n^2+n-10 = n^2 \Leftrightarrow n-1=0 \Leftrightarrow n=10.$$

Neste caso, a sucessão dada é majorada, a partir de $p=10$, por $\frac{1}{n^2}$:

$$n^2+n-10 > n-10 \Leftrightarrow \frac{1}{n^2+n-10} < \frac{1}{n-10}$$

$$n^2+n-10 = n-10 \Leftrightarrow n^2=0 \Leftrightarrow n=0$$

Por outro lado vê-se que a sucessão dada não é majorada, a partir de $p=0$, porque p e n são números naturais.

5.4.4 Exercícios de aplicação

Exercício 5.8 *Estude as sucessões definidas por $u_n = f(n)$, através das alíneas seguintes:*

a) Calcular em função de n:

$$u_{2n}, u_{n^2}, u_{3n-1}, u_{2+n^2}$$

b) Representar as sucessões da alínea a) e dada num gráfico ortonormado.

c) Estudar a monotonia da sucessão dada.

d) Saber se a sucessão dada é majorada, minorada ou limitada.

e) Saber identificar a sucessão majorante ou minorante da sucessão dada.

1.$u_n = 2n + 2$
2.$u_n = sen(n\frac{\pi}{6})$
3.$u_n = 1 + \frac{1}{n+1}$
4.$u_n = n\cos(n\frac{\pi}{3})$
5.$u_n = \frac{1}{4}n - 7$
6.$u_n = |5n - 23|$
7.$u_n = -\frac{2}{5}n + 3$
8.$u_n = (\frac{1}{2})^n$
9.$u_n = -0,003n + 4$
10.$u_n = (1,01)^n$
11.$u_n = -5n + 3$
12.$u_n = (-0,2)^n$
13.$u_n = \frac{2}{3}n + 1$
14.$u_n = (-1)^n n$
15.$u_n = 0,05n$
16.$u_n = 2^n - 2n$
17.$u_n = \sqrt{5n+9}$
18.$u_n = \frac{3n+2}{-n-3}$
19.$u_n = \sqrt{9n-4}$
20.$u_n = n + \frac{5}{n}$
21.$u_n = \sqrt{2n+4}$
22.$u_n = \frac{n^2+1}{2n}$
23. $u_n = \frac{n^2}{2^n}$
24.$u_n = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$
25.$u_n = n^5(0,09)^n$
26.$u_n = |5n + 3|$
27.$u_n = |2n - 7|$
29.$u_n = \frac{n^2-2n+3}{n-1}$

Exercício 5.9 *Considerando a sucessão u_n :*

a) Calcule u_0, u_1, u_3, u_4 e u_{n-1}

b) Determine um intervalo tal que, para todo o n natural, u_n esteja inserido nele.

c) Estude a monotonia da sucessão. Interprete o seu gráfico.

1.$u_n = \frac{4n+9}{2n+1}$
2.$u_n = \frac{5n+3}{n+1}$
3.$u_n = \frac{9n+2}{2n+3}$
4.$u_n = \frac{4n+3}{2n-7}$
5.$u_n = \frac{7n+2}{4n-25}$

Exercício 5.10 *Seja*

$$v_n = \frac{2n+3}{n+1}.$$

Mostre que, existe a e b reais tal que

$$v_n = a + \frac{b}{n+1}.$$

Exercício 5.11 *Nos exercícios seguintes a sucessão* (v_n) *é definida tal que,* $v_{n+1} = f(v_n)$.

a) Calcule (v_n) *para* $n \leq 20$.

b) Ilustre através dum gráfico e interprete o comportamento da sucessão dada.

c) Diga se a sucessão dada é majorada e/ou minorada.

d) Estude a monotonia dessa sucessão.

1. $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ *e* $u_0 = 1$;
2. $u_n = \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{1-u_n} \\ u_0 = 0 \end{cases}$;
3. $u_{n+1} = -u_n^2 + 4$ *e* $u_0 = 0$;
4. $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1}{u_n}}$ *e* $u_0 = 1$;
5. $u_{n+1} = 2u_n + 1$ *e* $u_0 = 1$;
6. $u_{n+1} = -u_n + 2$ *e* $u_0 = 0$;
7. $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 2$ *e* $u_1 = 0$;

8. $u_{n+1}=\frac{u_n}{2}-1$ e $u_1 = 4$;
9. $u_{n+1}=-\frac{2}{5}u_n+3$ e $u_1 = 5$;
10. $u_{n+1}=-4u_n+2$ e $u_1 = -\frac{1}{3}$;
11. $u_n=u_n+\frac{1}{u_n}$ e $u_0 = 5$;
12. $u_{n+1}=2+\frac{1}{u_n}$ e $u_1 = 3$;
13. $u_{n+1}=-1+\frac{2}{u_n-1}$ e $u_1 = 4$;
14. $u_{n+1}=\frac{-2u_n+3}{u_n+1}$ e $u_1 = 1$;
15. $u_{n+1}=\frac{u_n-3}{u_n-1}$ e $u_1 = 0$;
16. $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{1}{u_n}\right)$ e $u_1 = 1$;
17. $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)$ e $u_1 = 5$;
18. $u_{n+1}=\sqrt{1-u_n}$ e $u_1 = 1$;
19. $u_{n+1}=\left(u_n+\frac{5}{u_n}\right)$ e $u_1 = 1$;
20. $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$ e $u_1 = 2$;
21. $u_{n+1}=\sqrt{6-u_n}$ e $u_1 = -3$;
22. $u_{n+1}=\sqrt{6-u_n}$ e $u_1 = 0$.

Exercício 5.12 *Mostre que se u for crescente não majorada e v decrescente não minorada, então uv será decrescente a partir de p natural e esta sucessão não terá minorante.*

Exercício 5.13 *Duas sucessões são comparáveis se, e só se, uma for majorante da outra. Mostre que u e v não são comparáveis se, e só se, existe p e q naturais tal que*

$$(u_p - v_p)(u_q - v_q) < 0.$$

Deduza que elas são comparáveis se, e so se,

$$(u_p - v_p)(u_q - v_q) \geq 0.$$

Dê exemplos.

Exercício 5.14 *Mostre que se $u \leq v$ e $w \leq z$, então $u+w \leq v+z$. E, para qualquer δ real positivo, então $\delta u \leq \delta v$.*

Exercício 5.15 *Qual é o elemento neutro da adição em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

Exercício 5.16 *Seja* $u_n = (-1)^n(1-n^{-1})$ *e* $v_n = (-1)^{n+1}(2-n^{-1})$.

Determine $u+v$. Classifica a sucessão encontrada e encontre o seu termo geral.

Exercício 5.17 *Mostre que se u e v são monótonas então $u + v$, xu (x real) são monótonas.*

Exercício 5.18 *Mostre que se duas sucessões dadas são limitadas então a soma dela é uma sucessão limitada.*

Exercício 5.19 *Dadas as sucessões u e v. Estude as sucessões $u + v$, uv, ku (k real).*

a) $u_n = \frac{1}{n} + 1$ *e* $v_n = n + \frac{5}{n}$

b) $u_n = \sqrt{1-2n}$ *e* $v_n = \sqrt{\frac{1}{n}}$

c) $u_{n+1} = -3u_n + 4; u_1 = 0$ *e* $v_{n+1} = -3v_n + 4; v_1 = 5$

d) $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3}; u_1 = 0$ *e* $v_{n+1} = 2v_n + 1; v_1 = 1$

e) $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 2; u_1 = 0$ *e* $v_n = \frac{2}{n(n-1)}; n > 1$

f) $u_n = 1 + (-1)^{n+1}$ *e* $v_n = \sqrt{2}$

Exercício 5.20 *Problemas*

1. Seja $u_n : u_0 = 17$ *e*

$$u_n \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{2}; n: par \\ u_{n+1} = u_{n+1}; n: impar \end{cases}$$

a) Demonstre que existe uma infinidade de n *tal que* $u_n = 1$.

b) Estude a monotonia de u_n.

c) Retome as alíneas anteriores para $u_0 \in \{25, 2, 9\}$

2. Seja $u_n : u_n = u_{n-1} + (-1)^n n$ *e* $u_1 = 0$.

a) Calcule u_n *para* $n \leq 20$.

b) Apresente os resultados encontrados num quadro e num gráfico.

c) Calcule $v_n = u_{2n}$ *e* $w_n = u_{2n+1}$. *Estude-as.*

d) Exprima u_n *em função de* n.

3. Seja f *definida em* $\mathbb{R}^+$ *e a sucessão* $u_n : u_n = f(n)$

a) Prove que se f *for crescente então* u_n *também é crescente.*

b) Dê exemplos onde u_n *é crescente ou periódica e* f *não.*

4. Um vídeo clube possui três tarifas:

Tarifa 1: deposito de 400 escudos e 18 escudos por DVD

Tarifa 2: sem deposito; 40 escudos por DVD

Tarifa 3: ao pagar 400 escudos torna-se sócio e pode levar até 11 DVD

a) Uma pessoa que aluga 8 DVD por ano. Em função das tarifas, quanto pagará?

b) Com 500 escudos, em função das tarifas, quantos DVD poderá alugar?

c) Calcule as tarifas em função de n cassetes alugadas.

d) Qual a opção mais interessante. (faça gráfico)

4. A taxa, anual, de juros de depósito a Prazo é de 5%. Se a inicialmente a conta tiver 1000 escudos. Qual será o saldo da conta ao fim de 8 anos.

CAPÍTULO 6

Sucessões Usuais

6.1 Progressão aritmética

Definição 6.1 *Diz-se que uma progressão é progressão aritmética (ou por diferença) uma sucessão de termos tais que cada um deles é igual ao termo precedente aumentado duma constante denominada razão da progressão (e nota-se r).*

Definição 6.2 *Uma sucessão* $(u_n)_{n\geq a}$ *é sucessão aritmética se, e só se, a diferença entre dois termos consecutivos desta susseção é igual a uma constante r chamada razão da susseção aritmética.*

Exercício 6.1 *Identifique qual das seguintes sucessões são progressões aritméticas.*

(1) 2,4,6,8,....
(2) 81,27,9,3,1,1/3,....
(3) 96,92,88,...
(4) 1,2,4,8,16,32,...

Resolução:
Aplicando a definição:
(1) $4-2=2$
$6-4=2$
$8-6=2$
a razão r é igual a dois e é constante. Daí podem concluir que esta é uma sucessão aritmética.
(2) $81-27=54$
$27-9=18$
$9-3=6$

3 – 1 = 2
1 – 1/3 = 2/3
Ao analisar a diferença entre os termos seguintes e os precedentes encontra-se vários resultados. Como numa progressão aritmética a razão é constante então pode-se concluir que esta não é uma progressão aritmética.
(3) $92 - 96 = -4$
$88 - 92 = -4$
a razão r = -4, então trata-se duma progressão aritmética.
(4) $2 - 1 = 1$
$4 - 2 = 2$
$8 - 4 = 4$
$16 - 8 = 8$
A razão não é constante. Então, assim como a segunda alínea, não se trata duma progressão aritmética.

A progressão (1), de razão 2, é crescente porque $u_1 < u_2 < u_3 < ... < u_n$ *. Enquanto que, a progressão (3), de razão* -4*, é decrescente.*

Teorema 6.1 *Uma progressão aritmética é crescente se e só se a sua razão r for maior do que zero e o contrario é decrescente. E, se a razão for nula a sucessão é constante.*

6.1.1 Representação, propriedades e alguns teoremas

Uma progressão aritmética $(u_n)_{n \geq a}$ é representada da seguinte forma:

$$\div u_a \cdot u_{a+1} \cdot u_{a+2} \cdot u_{a+3} \cdot ... \cdot u_n \cdot u_{n+1} ... .$$

Isto é, antes do primeiro termo coloca-se o $\div$ e os termos sucessivos são separados por (.).

Continuando com a nossa progressão aritmética (1) de razão 2 e representada correctamente:

$$\div 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot ... .$$

Pela definição duma progressão aritmética temos:
$4 = 2 + 2$
$6 = 4 + 2$
$8 = 6 + 2$
.
.

.
generalizando:
$u_2 = u_1 + r$
$u_3 = u_2 + r$
subtraindo as duas equações obtemos os seguinte:
$u_2 - u_3 = u_1 + r - (u_2 + r) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow u_2 - u_3 = u_1 - u_2$
$\Leftrightarrow u_2 - (-u_2) = u_1 - (-u_3)$
$\Leftrightarrow 2u_2 = u_1 + u_3$
$\Leftrightarrow u_2 = (u_1 + u_3)/2$
logo :
$u_n = (u_{n-1} + u_{n+1})/2$

Teorema 6.2 *Seja $(u_n)_{n \geq a}$ progressão aritmética de primeiro termo u_a, e razão r. Para todo inteiro $n \geq a$, tem-se $u_n = u_a + (n - a)r$.*

Demonstração: (por indução)
Para qualquer de razão r:
$u_{a+1} = u_a + r$
$u_{a+2} = u_{a+1} + r \leq u_{a+2} = (u_{a+1} + r) + r = u_a + 2r$
$u_{a+3} = u_a + 3r$
:
para $n = a + p \leq p = n - a$
$u_{a+p} = u_a + pr$
logo o termo geral da sucessão aritmética é:
$u_n = u_a + (n - a)r$ $\square$
Caso particular: Seja u uma progressão aritmética,
$n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 + (n - 1)r$ ou
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
Do teorema anterior deduzimos que a sucessão é idêntica à

$$\div u_a \cdot ru_a \cdot 2ru_a \cdot 3ru_a \cdot \ldots \cdot (n-a)ru_a \cdot (n-a+1)ru_a \ldots$$

Daí,
$u_n = u_a + (n - a)r \Leftrightarrow$ (fórmula geral da progressão aritmética)
$\Leftrightarrow -u_a = -u_n + (n - a)r$
$\Leftrightarrow u_a = u_n - (a - 1)r$ (fórmula do primeiro termo em função do último)
$\Leftrightarrow (n - a)r = u_n - u_a$
$\Leftrightarrow n - a = (u_n - u_a)/r$
$\Leftrightarrow n = (u_n - u_a)/r + a$ (n número de termos duma dada p. a..)

$\Leftrightarrow (n-a)r = u_n - u_a$
$\Leftrightarrow r = (u_n - u_a)/(n-a)$ (razão da p. a. .)

6.1.2 Soma dos n primeiros termos

Teorema 6.3 *A soma de dois termos equidistantes, duma progressão aritmética finita $(u_n)_{n\geq a}$, dos extremos é constante e igual à soma dos extremos.*

Demonstração:
Seja

$$\div u_a \cdot u_{a+1} \cdot u_{a+2} \cdot u_{a+3} \cdot u_{a+4} \cdot u_{a+5} \cdot u_{a+6} \cdot u_{a+7} \cdot u_{a+8}.$$

Considerando os termos u_{a+2} e u_{a+6} equidistantes dos extremos:

$$u_{a+2} = u_a + 2r(1)$$

e

$$u_{a+8} = u_{a+6} + 2r \Leftrightarrow u_{a+6} = u_{a+8} - 2r(2)$$

Adicionando (1) e (2) obteremos:

$$u_{a+6} + u_{a+2} = u_{a+8} - 2r + u_a + 2r = u_a + u_{a+8}.$$

Generalizando:
Para $n = p$ com $p \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$

$$u_b = u_a + (b-a)r$$

e

$$u_p - b = u_p - (b-a)r.$$

Adicionando as duas equações obteremos:
$u_p - b + u_b = u_a + u_p$ $\square$

Proposição 6.1 *Quando o número de termos é ímpar, o termo do meio é igual à metade da soma dos termos dos extremos.*

Demonstração:
Seja

$$\div u_a \cdot u_{a+1} \cdot u_{a+2} \cdot u_{a+3} \cdot u_{a+4} \cdot u_{a+5} \cdot u_{a+6} \cdot u_{a+7} \cdot u_{a+8}$$

O termo do meio é:

$$u_a + 4 = u_a + 3reu_a + 4 = u_{a+8} - 3r.$$

Adicionando membro a membro as duas equações teremos:

$$2u_a + 4 = u_a + u_{a+8}$$

$$u_{a+4} = (u_a + u_{a+8})/2$$

para n (número de termos) ímpar

$$u_{(n+1)/2} = (u_a + u_n)/2$$

Exercício 6.2 *Calcule a soma dos termos duma sucessão aritmética limitada.*

Resolução:
Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e n limitada temos:

$$S_n = u_a + u_{a+1} + u_{a+2} + ... + u_n$$

Ou

$$S_n = u_n + ... + u_{a+2} + u_{a+1} + u_a$$

Adicionando as duas equações teremos:

$$2S_n = (u_a + u_n) + (u_{a+1} + u_{n-1}) + ... + (u_n + u_a)$$

Pelo teorema: soma de dois termos equidistantes dos extremos

$$\begin{aligned} 2S_n &= (u_a + u_n) + (u_a + u_n) + ... + (u_a + u_n) + (u_a + u_n) \\ 2S_n &= n(u_a + u_n) \end{aligned}$$

$S_n = n(u_a + u_n)/2$ (fórmula da soma dos n termos duma p. a .)
Ao substituir u_n por $u_a + (n - a)r$ obteremos a seguinte formula:

$$S_n = [2u_a + (n - a)r]n/2.$$

Exercício 6.3 *Seja S_n sucessão numérica:*

$$S_n = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$$

a) Calcule S_2, S_3, S_4, S_5.
b) Calcule $2S_n$ (seguindo os passos da demonstração).
c) Deduza a expressão de S_n em função de n. Conclua.

Exercício 6.4 *Calcule a soma dos n primeiros termos da sucessão $(u_n)_{n\geq 0}$: $u_n = 3_{n+1}$.*

Exercício 6.5 *Calcule a soma dos n primeiros números naturais.*

6.1.3 Médios aritméticos

Definição 6.3 *São chamados médios aritméticos, os termos que ficam entre dois extremos duma sucessão limitada.*

Exercício 6.6 *Seja o conjunto de números ímpares maiores do que 1 e menores do que 12. Determine os seus médios aritméticos.*
Solução:
$U = \{3, 5, 7, 9, 11\}$
Os extremos são 3 e 11 por isso os seus médios são: 5, 7 e 9.

Exercício 6.7 *Inserir entre a e b, m médios aritméticos:*
Resolução:
1º passo: procurar a razão da progressão
Considerando a e b os dois extremos e m os médios então a sucessão terá $m + 2$ termos. Sendo assim:
$b = a + [(m + 2) - 1]r \Leftrightarrow b = a + (m + 1)r \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow r = (b - a)/(m + 1)$
2º passo:
a nossa p.a. seria:

$$a.a + (b - a)/(m + 1).a + 2(b - a)/(m + 1).....b$$

Nota 6.1 *se, entre dois termos consecutivos a e b, duma p.a, for inserido uma mesma quantidade de médios aritméticos, as sub sucessões obtidas formam uma só p. a .*

$$r = (b - a)/(m + 1)$$

ou $r/(m+1)$ sendo b e a termos consecutivos da p. a dada. Logo o 1º termo da 1ª p. a é o 1º da 2ª e o último da 2ª é o primeiro da terceira, assim sucessivamente.

definição	$\forall n \in N, r \in R, u_{n+1} = u_n + r$
Propriedades de equivalência	$\forall n \in N, u_n = u_1 + (n-1)r$ (caso particular)
Motonia	$r > 0$: a sucessão é estritamente crescente $r = 0$: sucessão constante $r < 0$: sucessão estritamente decrescente
Calculo da soma dos n termos	$S = (u_1 + u_n)n/2$ (caso particular)

Figura 6.1:

Teorema 6.4 *a, b e c são termos consecutivos duma progressão aritmética se, e só se, b for média aritmética de a e c (isto é, $2b = a + c$)*

A demonstração será feita através dos seguintes exercícios. □

Exercício 6.8 *Determine os valores de a, b e c (termos consecutivos duma p. a):*
$a + b + c = 9$ *e* $2a = b - c = 0$.

Exercício 6.9 *Determine os três primeiros termos da sucessão u sabendo que a diferença entre soma dos dois primeiros termos e o terceiro termo é 7 e que*

$$2u_1 + 3u_2 - 4u_2 = 13.$$

Exercício 6.10 *Insira, entre 2 e 24, 10 médios aritméticos.*

Exercício 6.11 *Seja (u_n) progressão aritmética: $u_1 = -15$ e razão $r = 6$. Encontre o termo geral da sucessão dada. Determine o valor de n: $u_n > 105$.*

Exercício 6.12 *Seja $(v_n)_{n\geq 1}$ progressão aritmética: $v_1 = 12$ e razão $r = -5$. Encontre v_n em função de n. Encontre o valor de n: $v_n > 105$ e n:*

$$|v_n| > 10^5$$

6.1.4 Progressões aritméticas: Resumo

Progressões aritméticas: tabela exaustiva

Nas p. a . , para as formulas são consideradas cinco variáveis:
u_n, u_1, r, n e S onde:
u_1- 1^o termo
u_n – n-ésimo termo
r – razão
n – ordem ou número de termos
S – soma
Nas alíneas anteriores obtivemos as seguintes fórmulas: $u_n = u_1+(n-1)r$ e $S = n(u_1 + u_n)/2$.

Através destas poderemos deduzir outras que nos podem ser úteis na resolução de certos problemas.

Por isso, tentamos encontrá-las e apresentá-las no quadro abaixo indicado:

(consultar fixeiro tabela_exaustiva_p.aritmética)

6.1.5 Exercícios de aplicação

Exercício 6.13 *Encontrar o 30º termo dum conjunto de números impar maiores do que zero.*

Exercício 6.14 *Encontrar o 21º termo da seguinte p. a .* 80.75.70.65.60....

Exercício 6.15 *Calcule a soma dos termos da p. a .* 3.8.13.18.... *composto por 41 termos.*

Exercício 6.16 *Encontre a soma dos n primeiros números ímpares.*

Exercício 6.17 *Encontre o termo geral e classifique as seguintes sucessões:*

a) $u_4 = 23$ *e* $u_{10} = 53$
b) $r = -2$ *e* $u_{10} = 15$
c) $S = 425$; $r = 3$ *e* $n = 10$

Exercício 6.18 *Qual é o número de termos da p. a .* 100.98.96...22*?*

Exercício 6.19 *Se numa p. a . o 5º termo é 30 e o 20º é 60. Qual é a sua razão?*

Exercício 6.20 *Uma p. a . de razão 5 e 20º termo é 8, qual é o 3º termo?*

Exercício 6.21 *Calcule a soma dos 200 primeiros números ímpares positivos.*

Exercício 6.22 *As medidas dos lados dum triângulo são expressas por* $x+1$, $2x-1$,

x^2-2x+3 *e estão em p. a ., nesta ordem. Qual é o perímetro deste triângulo?*

Exercício 6.23 *Se numa p. a .* $u_1 = 1$, $s_n = 40$ *e* u_n *. Calcule a razão desta progressão em função de* u_n.

Exercício 6.24 *Qual é a soma dos múltiplos positivos de 8 formados por três algarismos?*

Exercício 6.25 *Determine o centésimo termo da p. a na qual a soma do terceiro termo com o sétimo é igual a 30 e a soma do quarto com o nono são 60?*

Exercício 6.26 *Encontre uma p. a tal que a soma dos n primeiros termos é* n^2 .

Exercício 6.27 *Prove que, se a progressão* $u_n = u_{n-1}/(1-u_{n-1})$ *e* $u_1 = -2$, *é negativa então* u_n *o é também..*

Exercício 6.28 *Diga se as seguintes sucessões são p. aritméticas e classifique-as quanto a sua monotonia:*

a) $u_n = 6n-3$
b) $v_n = n^2$
c) $w_1 = 5$ *e* $w_n - w_{n-1} = 2$

Exercício 6.29 *Determine os três primeiros termos duma sucessão aritmética sabendo que:*

$u_0 + u_1 - u_2 = 7$ *e* $2u_0 + 3u_1 - 4u_2 = 13$.

Exercício 6.30 *Ache a progressão aritmética em que:* $a_1 + a_2 + a_3 = 7$ *e* $a_4 + a_5 + a_6 = 56$.

Exercício 6.31 *Encontre a, b e c três termos consecutivos duma p. a tal que:*

$a+b+c=9$ e $2a+b-c=0$

Exercício 6.32 *Seja* $w_n = 2n-1$*:*

a. *Calcule* s_2, s_3, s_4, s_5.

b. *Calcule* $2S_n$.

c. *Deduza* S_n *em função de* n.

Exercício 6.33 *O perímetro dum quadrilátero irregular é igual a 28 unidades. Sabendo que o comprimento dos lados obedece à lei duma p. a.* (u_1, u_2, u_3, u_4) *de razão r. Escreva a equação do primeiro termo.*

a. *Considerando* $r=3$*. Qual é o comprimento de cada lado.*

b. *Conhecendo* $u_6 = 10$*. Calcule o comprimento dos lados.*

Exercício 6.34 *Diga qual das duas sucessões é uma progressão aritmética:*

a. $2u_n = u_{n-1} + 1$ *e* $u_0 = 2,$ $v_n = u_n - 1$

b. $2u_n = u_{n-1} + 6$ *e* $u_1 = 2,$ $v_n = u_n - 3$

Exercício 6.35 *Seja* $(a_n)_{n\geq 1}$ *progressão aritmética de razão r. Prove que:*

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$$

Exercício 6.36 *Dadas duas p. a* u_n *e* v_n *. Mostre que* $u_n + v_n$ *é também uma p. a .*

Exercício 6.37 *Um negociante empresta a um amigo 100000 escudos. Porém este deverá pagá-lo o montante acrescido de 1% de taxa de juros multiplicado pelo número de meses.*

a. *Calcule* S_n *em função de* n.

b. *Quanto pagará o amigo num espaço de dois anos.*

6.2 Progressões geométricas

6.2.1 Definições alternativas

Definição 6.4 *É uma sucessão cujo sucessor é o resultado do produto do termo precedente e uma constante q chamada razão geométrica.*

Definição 6.5 *A sucessão* $(u_n)_{n\geq a}$ *a é progressão geométrica de razão* q *se, e só se, para todo o inteiro* n *maior ou igual a* $a : u_{n+1} = qu_n$ *. Isto é, para qualquer* u_n *não nulo* $q = u_{n+1}/un$*.*

Definição 6.6 *Progressão Geométrica (p.g.) é toda sequência de números não nulos na qual é constante o quociente da divisão de cada termo (a partir do segundo) pelo termo anterior, esse quociente é chamado de razão* (q) *da progressão.*

Como definir uma progressão geométrica?

Para definirmos uma sucessão geométrica $(u_n)_{n\geq a}$ de razão q teremos que ter informações sobre o primeiro termo:

Temos: $u_{a+1} = qu_a$

$u_{a+2} = qu_{a+1} \Leftrightarrow u_{a+2} = q^2 u_a$

$\vdots$

$u_{a+p} = q^p u_a$

admitiremos a fórmula $u_{a+p} = q^p u_a$ como hipótese de indução. Se $n = a + p$ então $u_n = q^{(n-a)} u_a$.

Acabou-se de demonstrar o seguinte:

Teorema 6.5 *Seja* $(u_n)_{n\geq a}$ *uma sucessão geométrica de primeiro termo ua e de razão* q*. Para todo o inteiro* n *maior ou igual a* a*, temos* $u_n = q^{(n-a)}$ u_a*.* $\square$

Deve-se atentender às seguintes notas:

Nota 6.2 *Caso particular:*

$$\begin{aligned} u_n &= q^n u_0 \\ u_n &= q^{(n-1)} u_1 \end{aligned}$$

Nota 6.3 *Se uma p. g de razão* q *admite um termo nulo, a relação* $u_n = qu_{n-1}$ *nos permite concluir que os termos são todos nulos a partir duma determinada ordem (do primeiro se* $q \neq 0$ *e do segundo se* $q = 0$*)*

Nota 6.4 *O termo* u_n *é o* $(n - a + 1)$*-ésimo termo da sucessão* $(u_n)_{n\geq a}$*.*

Vejamos a ilustração abaixo:

Exemplo 6.1 *Estude as seguintes sucessões:*

a) *A sucessão* $u_n = 3^n$ *para todo o inteiro* n *e* $u_n \neq 0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3$$

Este quociente não depende de n. *Logo podemos concluir que se trata duma progressão geométrica de primeiro termo* $u_1 = 3^0 = 1$ *e de razão 3.*

b) $w_n = n^2$.

Resolução:

$w_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

$w_{n+1}/w_n = (n^2 + 2n + 1)/n^2 = 1 + 2/n + 1/n^2$

$w_2/w_1 = 1 + 2 + 1 = 4$

$w_3/w_2 = 1 + 2/2 + 1/4 = 9/4$

$w_2/w_1 \neq w_3/w_2$

O quociente depende de n. *Por isso, conclui-se que a sucessão não é uma progressão geométrica.*

c) $v_n = 3ev_{n+1} = -2v_n$

Resolução:

$v_2 = -2 \times 3 = -6$

$v_3 = -2 \times (-2 \times 3) = 12$

$v_4 = -24$

.

.

$v_n = 3(-2)^{n-1}$

$v_{n+1}/v_n = 3(-2)^n/3(-2)^{n-1} = -2$

Logo trata – se duma progressão geométrica de razão $q = -2$.

6.2.2 Representação, propriedades e alguns teoremas

Assim como a p.a. tem a sua representação a progressão geométrica (p.g) também tem a dela que é a seguinte:

$$\div \div u_1 : u_2 : u_3 : ... : u_{n-1} : u_n$$

ou

$$(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, ...u_{n-1}, u_n, u_{n+1}, ...)$$

onde, pela definição temos

$$u_2 = u_1 q, ..., u_n = u_{n-1} q$$

e podemos deduzir

$$q = u_2/u_1, ..., q = u_n/u_{n-1}$$

e

$$u_1, u_2, ..., u_n$$

diferentes de zero sse

$$(u_2)^2 = u_1 u_3 \Leftrightarrow u_2 = \sqrt{u_1 u_3} \Leftrightarrow u_n = \sqrt{u_{n-1} u_{n+1}}$$

Teorema 6.6 *Numa progressão geométrica finita, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é uma constante igual ao produto dos extremos.*

Demonstração:
Seja $(u_n)_{n \geq b}$ uma p.g. e $u_1 \neq 0$.
$u_3 u_{b-2} = u_1 q^2 u_1 q^{(b-2)-1}$
$= u_1 u_1 q^{(b-2)-1+2}$
$= u_1 u_1 q^{b-1}$
$= u_1 u_b.\square$
Obs: Quando a sucessão geométrica tem um número ímpar de termos, o termo do meio é igual à raiz quadrada do produto dos extremos.
Ilustremos com um exemplo

Exemplo 6.2 *Seja $(u_1, u_2, u_3, u_4, ..u_n...u_{2n-1})$ uma progressão geométrica. Calcule u_n.*

Resolução:
$u_{n-1} u_{n+1} = u_{n-1} u_n q = u_n q^{-1} u_n q = (u_n)^2$
e
$u_{n-1} u_{n+1} = u_1 u_{2n-1}$ (segundo o teorema anterior)
logo,
$(u_n)^2 = u_1 u_{2n-1} \Leftrightarrow u_n = \sqrt{u_1 u_{2n-1}}$ para $u_1 u_{2n-1} \geq 0$.

6.2.3 Monotonia

- Se uma progressão geométrica $(u_n)_{n \geq a}$ tem o primeiro termo e razão positivos, então todos os seus termos serão positivos e, neste caso, a sua monotonia depende da sua razão q (para todo u_n e q não nulos)

- Se todos os termos duma p.g. $(u_n)_{n \geq a}$ são negativos então o seu primeiro termo o é a sua razão é positiva. Esta sucessão será estudada, como no caso anterior. Terá que encontrar uma sucessão $(v_n)_{n\geq a}$ tal que $v_n = -u_n$.

- Caso a razão for negativa, os termos da sucessão se alternam sendo uma negativa e a outra positiva assim sucessivamente. Logo esta p.g. não é monótona.

Nota: Observe-se que se tem

$$u_{n+1} - u_n = qu_n - u_n = u_n(q-1) = u_a q^{n-a}(q-1).$$

Logo a monotonia da p.g. depende do sinal do primeiro termo u_a, da razão q e de $q-1$. O quadro que e segue resume a frase anterior:

Primeiro termo	**Razão q**	
0	Qualquer	sucessão constante nula
qualquer	$q = 0$	sucessão estacionária nula *
qualquer	$q = 1$	sucessão constante
diferente de zero	$q < 0$	sucessão não é nem crescente, nem decrescente e Nem constante. os termos dela são alternadamente positivos e negativos.
> 0	$0 < q < 1$	sucessão decrescente
> 0	$1 < q$	sucessão crescente
< 0	$0 < q < 1$	sucessão crescente
< 0	$1 < q$	sucessão decrescente

* a sucessão é nula a partir do segundo termo

6.2.4 Exercícios

Exercício 6.38 *Represente num gráfico os pontos de coordenadas* (n, u_n) *em que* u_n *é uma sucessão geométrica de primeiro termo* u_0 *e razão* q*:*

a) $u_0 = 2, q = 1/2$

b) $u_0 = 12, q = -1/3$

c) $u_0 = 1/8, q = 2$

d) $u_0 = -1/9, q = 3$

e) $u_0 = -1/9, q = -3.$

6.2.5 Produto dos termos duma p.g.

Teorema 6.7 *O produto dos termos duma p. g. é igual à raiz quadrada do produto dos extremos elevados pelo número de termos da sucessão.*

Demonstração: exercício abaixo □

Exercício 6.39 *Calcule* $u_1 \times u_2 \times ... \times u_n$

Seja P o produto dos termos duma p.g. então:
$P = u_1 \times u_2 \times ... \times u_n$
ou
$P = u_n \times u_{n-1} \times ... \times u_2 \times u_1$
Multiplicando membro a membro estas igualdades teremos:
$P^2 = u_1 \times u_n \times u_2 \times u_{n-1} \times ... \times u_n \times u_1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P^2 = u_1 \times u_n \times u_1 \times u_n \times ... \times u_n \times u_1$
$\Leftrightarrow P^2 = (u_1 \times u_n)^n$
$\Leftrightarrow P = \sqrt{(u_1 \times u_n)^n}.$
Ao substituir u_n por $u_1 q_{n-1}$ obtém-se o seguinte:
$P = \sqrt{(u_1 u_1 q^{n-1})^n} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P = \sqrt{(u_1^2 q^{n-1})^n}$
$\Leftrightarrow P = u_1^n q^{n(n-1)/2}$
Generalizando ter-se-à

$$P = u_a^n q^{n(n-a)/2}$$

6.2.6 Soma dos n termos duma progressão geométrica

Comecemos pelo seguinte

Exercício 6.40 *Considere* S_n *a soma dos* n *primeiros termos duma p.g. definida por:*

$$S_n = 1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2n - 1$$

a) Calcule S_2, S_3, S_4, S_5

b) Calcule $2S_n, 2S_n - S_n$*. Deduza a expressão de* S_n *em função de* n*.*

c) Mostre que S_n *é a soma dos* $(n + 1)$ *primeiros termos duma p.g. qualquer.*

Solução:

a) $S_2 = 3, S_3 = 7, S_4 = 15, S_5 = 31$

b) $2S_n = 2 + 4 + 8 + ... + 2n - 1 + 2n$
$2S_n - S_n = 2n - 1 \Leftrightarrow (2-1)S_n = 2n - 1 \Leftrightarrow S_n = (2n-1)/(2-1)$

No caso geral tem-se o teorema abaixo, que se demonstra da mesma forma:

Teorema 6.8 *Para todo real q (razão duma progressão geométrica) diferente de 1,*

$$1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} = (q^{n-1})/(q-1).$$

□

Exercício 6.41 *Seja u_n uma p. g. de razão q tal que q é positivo e maior do que 1*

Exercício 6.42 $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, ...u_{n-1}, u_n)$ *e* $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + ... + u_{n-1} + u_n$

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + ... + u_{n-1} + u_n =$
$= u_0 + (u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + ... + u_{n-1} + u_n) =$
$= u_0 + S_n =$*(quando $n \in \mathbb{N}$)*
$= S_{n+1}$

Exercício 6.43 *Encontre a soma dos n primeiros termos duma p. g. qualquer.*

Solução:

"$(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, ...u_{n-1}, u_n)$ uma progressão geométrica e $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + ... + u_{n-1} + u_n$

Multiplique S_n por q (razão da progressão dada):

$qS_n = qu_1 + qu_2 + qu_3 + qu_4 + qu_5 + ... + qu_{n-1} + qu_n$

- se a progressão for crescente terá o seguinte :

$qS_n - S_n = qu_n - u_1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow S_n(q-1) = qu_n - u_1$
$\Leftrightarrow S_n = (qu_n - u_1)/(q-1)$
$\Leftrightarrow S_n = (qu_1q_{n-1} - u_1)/(q-1)$
$\Leftrightarrow S_n = (q_nu_1 - u_1)/(q-1)$
$\Leftrightarrow S_n = u_1(q_{n-1})/(q-1)$

- se a progressão for decrescente terá o seguinte:

neste caso $u_n \leq qu_n$

$S_n - qS_n = u_1 - qu_n \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow S_n(1-q) = u_1 - qu_n$
$\Leftrightarrow S_n = (u_1 - qu_n)/(1-q)$
$\Leftrightarrow S_n = (u_1 - q_nu_1)/(1-q)$
$\Leftrightarrow S_n = u_1(1-q_n)/(1-q)$

Nota 6.5 *Se $q = 1$, pela formula da encontrada, obterá 0/0 (uma indeterminação). Por isso, deve dividir a soma por $q - 1$:*

$S_n = u_1[(q_{n-1})/(q-1)]$

Neste caso, para todo o inteiro natural n, obterá $(q_{n-1}) = (q-1)(1+q+q_2+...+q_{n-1})$

Logo:

$S_n = u_1(1+q+q_2+...+q_{n-1}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_n = u_1(1+1+1_2+...+1_{n-1})$

$\Leftrightarrow S_n = u_1(1+1+1+...+1)$

$\Leftrightarrow S_n = nu_1$

6.2.7 Exercícios

Exercício 6.44 *Calcule:*

$Z = 6 + 18 + 54 + ... + 2 \times 3^{10}$

$Y = 48 + 24 + 12 + ... + 3 \times 2^{-3}$

$Z = 1 - 1/2 + 1/4 - 1/8 + ... + (-1/2)^{12}$

n

Exercício 6.45 *Considere a sucessão v_n definida por:*

$$v_n = 1 + 1/3 + 1/9 + ... + (1/3)^n = \sum_{k=0}^{n} (1/3)^k.$$

a) Calcule v_0, v_1, v_{10} e classifique v_n quanto à sua monotonia.

b) Demonstre que para todo n inteiro natural, v_n está pertence ao intervalo $[1, 3/2]$ (considere $n \geq 0$).

6.2.8 Médios geométricos

Definição 6.7 *Assim como os médios aritméticos, são chamados médios geométricos, os termos que ficam entre dois extremos duma sucessão geométrica limitada.*

Teorema 6.9 *Três reais positivos não nulos; a, b, c; são termos consecutivos duma progressão geométrica se, e só se, b é meio geométrico de a e c; isto é $b^2 = ac$.*

Demonstração: (problema abaixo).□

Exercício 6.46 *Insira entre a e b, m médios geométricos.*

Definição	$\forall n \in N, q \in R, u_{n+1} = q\, u_n$
Propriedade equivalente	$\forall n \in N, u_n = q^{n-1} u_1$ ou $u_n = q^n u_0$
Monotonia	$u_{n+1} - u_n = q^{n-1} u_1 (q-1)$
Calculo da soma dos n termos	$S = u_1 (q^n - 1)/(q-1)$ para $q \neq 1$ ou $S = u_0 (q^{n+1} - 1)/(q-1)$

Figura 6.2:

Resolução:

- $n = m + 2$ (número de termos da sucessão)
- Procurar q (razão da progressão)

$b = aq^{m+2} - 1 = aq^{m+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $q = \sqrt[m+1]{\dfrac{b}{a}}$

logo a progressão será representada da seguinte forma:

$$(a, aq, aq^2, ...b).$$

6.2.9 Progressões geométricas: Resumo

6.2.10 Progressões geométricas: tabela exaustiva

Nas p. g . , para as formulas são consideradas cinco variáveis:
u_n, u_1, r, n e S onde:
u_1- 1^o termo
q – razão
u_n – n-ésimo termo
n – ordem ou número de termos
S – soma

(consultar ficheiro tabela_exaustiva_p. geométrica)

6.2.11 Exercícios propostos

Exercício 6.47 *Calcule:*

a) *o 11º termo da sucessão geométrica (1, 2, 4, 8 ...)*
b) *o 9º termo da p g (9, 3, 1, 1/3 ...)*
c) *o 7º termo do conjunto dos múltiplos de 5*
d) *o 30º termo da p g cuja razão é 1/2 e o primeiro termo 2*
e) *o 1º e 6º termo da p g de razão –2 e segundo termo – 4*
f) u_6 *sabendo que u1 = 3 e q = - 1/2.*

Exercício 6.48 *Encontre os oito primeiros termos da p.g decrescente (1/2, 1/4,....)*

Exercício 6.49 *Diga se as seguintes progressões são p. g ou não. Caso a sequência é p.g:*

Exercício 6.50 *Calcule os cinco primeiros termos, ilustre-as num gráfico e determine a sua monotonia e se é ou não limitada*

g) $u_n = 5 \times 4^{n-1}$
h) $u_n = -3 \times \sqrt{2n}$
i) $u_n = 9 \times 3^{-n+1}$
j) $u_n = 12 \times (-1)^n$
k) $u_n = 2^{n+1}$
l) $u_n = 5 \times 9^n - 7 \times 3^{2n+1}$

Exercício 6.51 *a)Seja* (u_n) *uma p g de razão q = 3 e* u_1*= 2. Calcule* u_5 *e* S_5

b) Seja (u_n) *uma p g de razão q = - 1/2 e* u_1 *= 3. Calcule* u_6 *e* S_6

c) Seja (u_n) *uma p g de razão q = 1/3 e* u_0 *= 4. Calcule* u_6 *e* S_6

d) Seja (w_n) *uma p g de razão q e* u_1 *= 2. Determine q e* S_4*, sabendo que* u_4 *= 54.*

e) Seja (w_n) *uma p g de razão q e* $u_0 = -1080$*. Determine q e* S_5*, sabendo que* $u_5 = -5/36$*.*

Exercício 6.52 *a) Calcule a soma dos dez primeiros múltiplos de 2.*

b) Calcule a soma dos oito primeiros termos da sucessão (27,9, 3...)

Exercício 6.53 *a) Interpolar ou inserir três meios geométricos entre 3 e 48.*

b) Interpole entre 2 e 162 três meios geométricos

Exercício 6.54 *Dar o valor de x na igualdade $x + 3x + ... + 729x = 5465$, sabendo-se que os termos do 1° membro formam uma p.g.*

Exercício 6.55 *Seja u_n definida por $u_{n+1} = (u_n + 8)/5$ e $u_0 = 1$.*

m) Calcule u_1 e u_2. Será a sucessão uma p. g.?

n) Represente graficamente as rectas D e Q com as seguintes equações respectivamente $y = x$ e $y = (x+8)/5$ (ilustrando os termos da sucessão na recta)

o) As rectas se intersectam num ponto P. Identifique esse ponto.

p) Consideremos v_n uma sucessão definida por $v_n = u_n - p$

q) Será v_0, v_1 e v_2. Trata-se duma p. g.?

r) Calcule v_{n+1} em função de un. Deduza v_{n+1}/v_n . Conclua.

s) Deduza a expressão de u_n em função de n.

Exercício 6.56 *Responda as questões do exercício anterior. Considerando as seguintes sucessões:*

t) $2u_n = u_{n-1} + 1$, $u_0 = 2$,$v_n = u_{n-1}$

u) $2u_n = u_{n-1} + 6$, $u_1 = 2$, $v_n = u_n - 3$

v) $u_{n+1} = u_{n+1}/2u_n$, $u_2 = 2$, $v_n = (u_{n-1})/(2u_{n+1})$

w) $2u_n = u_{n-1} + 1$, $u_0 = 2$, $v_n = u_{n-1}$

Exercício 6.57 *Duas firmas apresentaram uma proposta de contracto ao Sr. José, com os seguintes salários:*

- A firma A propõe pagá-lo 3000 escudos por dia

- A firma B propõe começar por 1escudos. Mas o valor do dia anterior será dobrado diariamente.

Que contrato deverá o Sr. José assinar? Ajude-o a decidir.

Exercício 6.58 *Num tubo de ensaio há uma célula, que por hora se divide em três iguais. Num período de 15 horas o tudo está cheio. Qual é o espaço ocupado ao fim de 14 horas?*

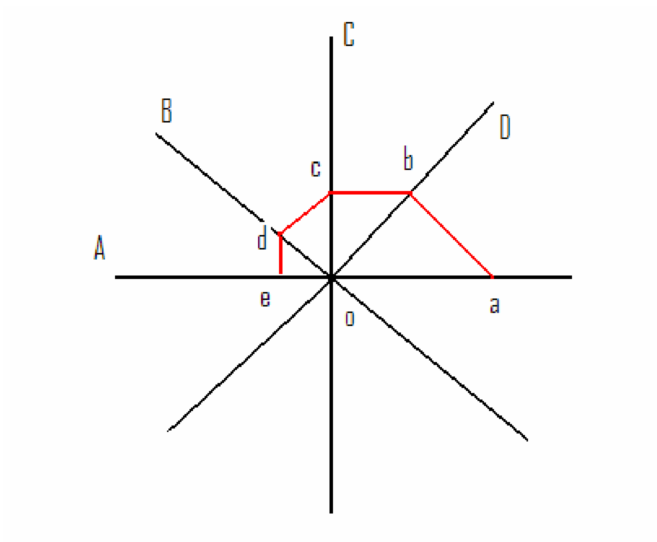
Exercício 6.59 *A pressão atmosférica ao nível das águas do mar é 760 mm de mercúrio (Supondo que o ar é um gás homogéneo). À medida que subimos 5,5 km a pressão reduz-se pela metade. Qual é a pressão às seguintes altitudes: 11 km, 2250 m, 16,5 km e 110 km.*

Exercício 6.60 *Seja $u_n = -1$ e $u_{n+1} = -3\sqrt{u_n}$. Calcule e estude a sucessão.*

Exercício 6.61 *Existem vidros que diminuem a luminosidade de 10%. Calcule o número de placas de vidro que necessário para que se possa obter uma luminosidade de 25%.*

Exercício 6.62 *Sabendo que, por radioactividade, um pedaço d rádio perde a sua massa em 1500 anos, qual a massa dum pedaço de 30g há 4000 anos a.C.?*

Exercício 6.63 *Considere a figura seguinte formada por duas rectas perpendiculares e bissectrizes dos respectivos ângulos formados pelas rectas perpendiculares.*



A distancia do segmento $[ao]$ é de 3 cm, $[ab] \perp$
D sendo b a imagem de a. E assim sucessivamente, continuando a traçar os segmentos de rectas, diga qual será o comprimento da linha quebrada de $[aj]$.

18. Considera-se (u_n) :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{n}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e

$$u_0 = \frac{2}{3}.$$

a) Calcule u_1 e u_2

b) Seja

$$v_n = u_n\sqrt{2} - n.$$

Mostre que v_n é uma sucessão geométrica.

c) Calcule, em função de n, o termo geral de u_n.

d) Calcule

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Exercício 6.64 *Seja*

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 3v_n \end{cases}$$

e $u_0 = 1$*;* $v_0 = 2$*.* $x_n = u_n + v_n$ *e* $y_n = u_n - v_n$

a) Mostre que x_n *é uma progressão geométrica e* y_n *uma sucessão constante.*

b) Calcule o termo geral de u_n *e* v_n*.*

Exercício 6.65 *Calcule, em função de* a_1*,* b_1*,* r *e* q*,*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i}$$

sendo $(a_n)_{n\geq 1}$ *uma p. a de razão* r *e* $(b_n)_{n\geq 1}$ *uma p. g de razão* q*.*

Exercício 6.66 *Em 1985 o preço de cada quilo de carne era 500 escudos. Sabendo que o aumento de preço é de 10% por ano. Calcule, sabendo que f(0) = 500 (preço em 1985); f(1) é o preço no ano seguinte e f(n) é o preço em (1985 + n):*

a) Calcule f(n +1) em função de f(x) e f(n) em função de n.

b) Qual foi o preço em 1990?

c) A partir de que ano, o preço do quilo, dobrou?

CAPÍTULO 7

Limite das sucessões

7.1 Definição e propriedades

Seja u_n uma sucessão num conjunto K. u_n diz-se limitada superiormente se o conjunto dos seus termos, isto é, o conjunto $\{u_n \in K : n \in \mathbb{N}\}$, for limitado superiormente em K. A definição de sucessão limitada inferiormente é análoga. Uma sucessão diz-se limitada se for limitada superiormente e inferiormente.

7.1.1 Exercícios

Exercício 7.1 *Seja*

$$u_n = \frac{1}{n}; v_n = \frac{1}{2^n}; r_n = \frac{(-1)^n}{2n}; t_n = (-0{,}2)^n$$

a) Calcule os dez primeiros termos de cada uma das sucessões dadas e apresente os resultados numa tabela.

b) Represente-os num gráfico ortonormado.

c) Prove que as sucessões u_n e v_n são decrescentes e estude a monotonia de r_n e t_n.

d) Estude a monotonia de $|r_n|$; $|t_n|$.

e) Prove que existe um inteiro m tal que: $r_m < 10^{-2}$; $t_m < 10^{-2}$;

$$|r_m| < 10^{-2}; |t_m| < 10^{-2}.$$

f) Mostre que para todo o n maior que m tem-se: $r_m < 10^{-2}$; $t_m < 10^{-2}$;

$$|r_m| < 10^{-2}; |t_m| < 10^{-2}$$

g) Resolva as alíneas e) e f) para 10^{-5}.

Exercício 7.2 *Mostre que:*
a)

$$|x| = \max\{x, -x\}$$

b)

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

c)

$$|x| \leq a$$

é equivalente às desigualdades

$$-a \leq x \leq a$$

e também à afirmação simultânea de que $x \leq a$ *e* $-x \leq a$.

7.1.2 Limite

Definição:

Definição 7.1 *Seja* $\mathbb{K}$ *um corpo ordenado,* a $\mathbb{K}$ *e* u_n *uma sucessão de elementos em* $\mathbb{K}$*. Diz-se que* u_n *tende ou converge para* a*, quando, para qualquer* $\partial > 0$ *em* $\mathbb{K}$*, se pode determinar um numero* $p \in \mathbb{N}$ *tal que para qualquer* $n \geq p$ *se tenha*

$$|u_n - a| < \partial \, .$$

E nota-se:

$$u_n \to a, \lim_{n\to a} u_n = a, \lim_n u_n = a$$

e/ou

$$\lim u_n = a \, .$$

Exercício 7.3 *Prove que:*

a) $u_n = \frac{1}{n}$ *converge para zero.*

b) $d_n = \frac{1-n-(-1)^n 2^{-n}}{2n}$ *tende para zero.*

c) $x_n = \frac{n+1}{2n}$ *não tende para zero.*

d) $w_n = (-1)^n$ *não tem limite.*

7.2 Sucessões convergentes

7.2.1 Definição

Notemos por $Cv(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ è o conjunto das sucessões convergentes. Determinemos o limite da soma dos n primeiros termos duma progressão geométrica decrescente:

A soma dos n primeiros termos duma progressão geométrica é S_n tal que:

$$\begin{aligned} S_n &= u_1(1-q_n)/(1-q) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow S_n = u_1/(1-q) - u_1 q_n/(1-q). \end{aligned}$$

Com esta fórmula obteremos uma parte fixa: $u_1/(1-q)$, e uma outra que varia de acordo com n (número de termos): $u_1 q^n/(1-q)$. Tendo em conta que $q < 1$, então quanto maior for n menor será q_n e tenderá para zero. Logo : $u_1 q_n/(1-q) \to 0$ e $lim S_n = u_1/(1-q)$.

Nota 7.1 *A soma dos n primeiros termos duma progressão geométrica depende sempre o sinal do primeiro termo da p. g.*

1º $q > 1$ *:* $(q^n - 1)/(q-1)$ *é positivo pois* q *e* q_n *são maiores do que 1. Logo o produto* $u_1(q^n-1)/(q-1)$ *toma o sinal de* u_1*.*

2º $q = 1$*:* $S_n = nu_1$*. Neste caso também a soma toma o sinal do primeiro termos. Pois, n é sempre positivo.*

3º $q < 1$*:* $(q^n-1)/(q-1)$ *é positivo porque* $(q^n - 1)$ *e* $(q-1)$ *são ambos negativos. Logo* s_n *toma o sinal do primeiro termo da progressão.*

Teorema 7.1 *Uma sucessão geométrica é limitada se, e só se:* $|q| \leq 1$*.*

Demonstração:

Seja

$$u_n = u_a q^{n-a}$$

Quando $q = 0$, a sucessão é constante e $u_n = 0$.

Se $q = 1$ então $u_n = u_a$.

Se $q = -1$ então $u_n = u_a$ quando $n - a$ for par e o $u_n = -u_a$ para $n - a$ impar (neste caso a sucessão não é limitada)

Se $q > 1$ e $q < -1$, com pertencente a $\mathbb{Z}$, então

$$\frac{1}{q^{n-a}} \approx 0$$

com quando n for infinitamente grande. Logo a sucessão dada é decrescente e tende para zero. □

- Para Zero ou infinitésimo

Teorema 7.2 *A sucessão*

$$\frac{1}{n^\alpha}$$

é um infinitesimal se, e só se,

$$\alpha \geq 1.$$

Demonstração do teorema : (exercícios abaixo) ■

Exercício:

Exercício 7.4 *a) Mostre que, para todo n natural não nulo:*

$$\sqrt{n} \leq n \leq n^2 \leq n^3.$$

b) Prove o inverso nas mesmas condições que na alínea a).

c) Deduza que

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}$$

converge para zero.

d) Para p inteiro positivo mostre que

$$\frac{1}{n^p}$$

tende para zero.

Exercício 7.5 *a) Seja b inteiro: $b \geq 2$. Mostre que, para todo n natural, $b_n \geq 2^n$.*

b) Mostre que o inverso de b_n tende para zero.

Conclua.

7.3 Método de comparação

Para demonstrar que uma dada sucessão tende para zero, pode compará-la a uma já conhecida que também tende para zero.

Teorema 7.3 *Seja v_n uma sucessão numérica. Existe $u_n \to 0$, um real a e m inteiro natural tais que para todo $n \geq m$, tem-se:*

$$|v_n| \leq a|u_n|.$$

Então a sucessão v_n também converge para Zero.

Exemplo 7.1 *A sucessão : converge para zero.*

Exercício:

Exercício 7.6 *Seja*

$$u_n = 2^n - n$$

a) *Mostre que*

$$u_{n+1} = 2u_n + n - 1$$

b) *Mostre que a sucessão dada é crescente.*

c) *Mostre que para todo n natural*

$$2^n > n$$

Exercício 7.7 *a) Prove que, para todo n natural:*

$$n \geq \sqrt{n}\,.$$

b) Mostre que

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

c) Deduza que

$$\frac{1}{2^n} \to 0\,.$$

7.4 Propriedades dos infinitésimos

Teorema 7.4 (propriedades dos infinitésimos) *- Se $u_n \to 0$ e a sucessão v_n é tal que a partir de certa ordem $|v_n| \leq u_n$ então*
$v_n \to 0$;
- Se $u_n \to 0$ e k um real qualquer então $ku_n \to 0$;
- O inverso dum infinitésimo é um infinitamente grande e reciprocamente

$$u_n \to 0 \Leftrightarrow 1/u_n \to \infty, u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

- O produto duma sucessão infinitésima por uma limitada é um infinitésimo
$u_n \to 0$ e v_n limitada $\Rightarrow u_n v_n \to 0$

Exercício 7.8 *Demonstração das propriedades.*

Exercício 7.9 *Estude a convergencia das seguintes sucessões:*

$$u_n = \frac{1}{a^n} : a > 1; w_n = b^n : 0 < b < 1\,;$$

$$c_n = \frac{1}{n^p} : p > 0\,;$$

$$v_n = q^n : q \in R\,.$$

e diga em que caso esta ultima é um infinitesimal.

a) Calcule

$$\left|\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right| \leq \frac{1}{n^p};$$

$$\left|\frac{1}{n^2+1}\right| \leq \frac{1}{n^p};$$

$$\left|\frac{1}{-3^n}\right| \leq q^n$$ *, (para q não inteiro) e* $|u_n| \leq w_n$.

b) Multiplique todas as sucessões dadas por

$$k \in \left\{\frac{1}{2}, -4, \frac{3}{1}\right\}$$

e calcule o limite de cada uma das sucessões encontradas.

c) Calcule o limite do inverso de toda as sucessões dadas.

Exercício 7.10 *d) Seja*

$$b_n = k + \frac{1}{2^n}.$$

Encontre o limite desta sucessão e o do produto de cada uma das sucessões iniciais por esta.

Teorema 7.5 (unicidade do limite) *Seja* $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ $(U_n; n \in \mathbb{N})$, $l, l' \in \mathbb{R}$. *Se* u *converge para* l *e se* u *converge* l', *então* $l = l'$.

Demonstração: (por reducção ao absoluto)

Suponhamos que $l \neq l'$ e deduzamos que o enunciado é falso. Tomemos $\lambda = (1/2)\,|l - l'|$.

$\lambda > 0$; e como u converge para l , existe n tal que:

$$\forall\lambda > 0 \wedge \exists n \in \mathbb{N}\,|u_n - l| < \lambda(l \in \mathbb{R}; \lambda \in \mathbb{R}^+).$$

E como u converge, também, para l', existe n' tal que:

$$\forall\lambda > 0 \wedge \exists n' \in \mathbb{N}\,\left|u_{n'} - l'\right| < \lambda(l \in \mathbb{R}; \lambda \in \mathbb{R}^+).$$

Sendo $m = sup\{n, n'\}$ e $m \geq n$ e $m \geq n'$;

$$\left|l - l'\right| = \left|l - u_m + u_m - l'\right| \leq |u_m - l| + \left|u_m - l'\right| < 2\lambda$$

enfim $|l - l'| < |l - l'|$, o que é falso.

Nota : dizer que u é convergente é o mesmo que dizer que o limite de u existe é finito.

Teorema 7.6 (das sucessões enquadradas) *Seja a_n, b_n e c_n três sucessões tais que $a_n \leq b_n \leq c_n$ para $n \geq t$ e , então .*

Demonstração:

Seja $\partial \in K$ um positivo qualquer tem-se

$$l - \partial < a_n$$

para $n \geq r$ e

$$c_n < l + \partial$$

para $n \geq s$. Assim, pondo

$$p = \max\{r, s, t\},$$

tem-se para $n \geq p$,

$$l - \partial < a_n \leq b_n \leq c_n < l + \partial,$$

isto é,

$$|b_n - l| < \partial,$$

o que prova que $b_n \to l$. □

Teorema 7.7 *Se $x_n \to l$ e $y_n \to \partial$ e $l < \partial$, então $x_n < y_n$.*

Teorema 7.8 *Se $x_n \to l$ e $y_n \to \partial$ e $x_n \geq y_n$, então $l \geq \partial$.*

Demonstração dos dois teoremas:

Seja

$$\varepsilon > 0,$$

existe um inteiro b tal que

$$p \geq b \; : \; l > x_p - \frac{1}{2}\varepsilon \; ;$$

também existe c tal que :

$$y_p + \frac{1}{2}\varepsilon > \partial \; .$$

Seja n o supremo de b e c; por hipótese

$$x_n \leq y_n, n \geq b$$

e

$$n \geq c$$

então:

$$l > x_n - \frac{1}{2}\varepsilon \geq y_n - \frac{1}{2}\varepsilon = y_n + \frac{1}{2}\varepsilon - \varepsilon > \partial - \varepsilon \; .$$

Então fica demonstrado que:

$$\forall \varepsilon > 0, \partial - l < \varepsilon \Rightarrow \partial - l \leq 0 \Leftrightarrow \partial \leq l$$

□

Se

$$l < \partial, \varepsilon = |\partial - l| / 2,$$

para n infinitamente grande tem-se

$$x_n < l + \varepsilon = l - \varepsilon < y_n$$

□

7.5 Sucessões divergentes

- Uma sucessão é simplesmente divergente ou divergente quando esta não tem minorante ou majorante.

Ou

$$\forall \lambda > 0 \wedge \exists n \in \mathbb{N}\, |u_n - l| \geq \lambda (l \in \mathbb{R}; \lambda \in \mathbb{R}^+).$$

- u_n é infinitamente grande quando tem minorante e o seu limite é $+\infty$.

Exemplo 7.2 *A sucessão*

$$(u_n)_{n\in N} = n$$

(conjunto dos números naturais), cujo minorante é 1, é um conjunto infinitamente grande porque não tem fim.

- u_n é infinitamente grande negativo se, e só se, o seu limite é $-\infty$.

Exemplo 7.3 $u_n = -2n$ *ou seja conjunto dos números pares negativos (de majorante -2).*

Nota 7.2 *Uma sucessão diverge para $-\infty$ se, e só se, o seu oposto diverge para $+\infty$.*

7.6 Propriedades das sucessões infinitamente grandes/pequenos

Teorema 7.9 *(i) se $u_n \to +\infty$ ou $u_n \to -\infty$ ou $u_n \to \infty \Rightarrow u_n$ não é limitada*

(ii) se uma sucessão admite uma subsucessão que é infinitamente grande então a sucessão não é limitada

(iii) se $u_n \to +\infty$ e a sucessão v_n é tal que a partir de certa ordem $v_n \geq u_n$, então $v_n \to +\infty$

ou seja $u_n \to +\infty$ e ■$p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow v_n \geq u_n$ então $v_n \to +\infty$

(iv) se $u_n \to +\infty$ e α um número real qualquer então $u_n + \alpha \to +\infty$

(v) se $u_n \to +\infty$ e β um número real positivo então $\beta\, u_n \to +\infty$

(vi) se v_n tende para $-\infty$ e a sucessão u_n é tal que a partir de certa ordem $v_n \leq u_n$ então u_n tende para $-\infty$

Os exercícios abaixo demonstram as propriedades acima referidas.□

7.7 Exercícios:

Exercício 7.11 *a) Mostre que $(b_n) : b \geq 2$ é ilimitado.*

b) Mostre que $(n_p) : p$ inteiro natural maior ou igual a 1

c) Prove que $n - n^2$ tende é infinitamente pequeno quando n for infinitamente grande.

Exercício 7.12 *a) Prove que*

$$u_n = \frac{n^2+2n+2}{n} \to +\infty$$

(compare a sucessão dada com $\frac{n^2}{n}$ *)*

b) Prove que $u_n = n^2 - n$ *diverge.*

c) Prove que $u_n = \frac{n^2+1}{2n-3} \to +\infty$ *comparando o numerador com* n^2 *e o denominador com* $2n$*.*

Exercício 7.13 *Calcule o limite de:*

$$5\times 2^n; \left(\frac{5}{2}\right)^n; \sqrt{n}-1; 2n-n^2$$

quando n tende para o infinito.

Nota 7.3 *Nenhuma sucessão aritmética de razão não nula é limitada*

Nota 7.4 $q > 0 : (q_n)$ *a sucessão diverge para* $+\infty$

7.8 Operações com sucessões convergentes

Proposição 7.1 *A soma e a diferença de duas sucessões convergentes é uma sucessão convergente*

$u_n \to a$ *e* $v_n \to b \Rightarrow u_n \pm v_n \to a \pm b$ *(1)*

Proposição 7.2 *O produto de duas sucessões convergentes é uma sucessão convergente*

$u_n \to a$ *e* $v_n \to b \Rightarrow u_n v_n \to ab$*(2)*

Proposição 7.3 *O produto duma sucessão convergente por uma constante é uma sucessão convergente*

$u_n \to a \Rightarrow ku_n \to ka, k \in \mathbb{R}$ *(3)*

Demonstração de (1) e (3):

$\forall\ u_n$ e $v_n \in Cv(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, λ e $\mu \in \mathbb{R}$

$lim u_n = a$ e $lim v_n = b$. Seja $\varepsilon > 0$; $\varepsilon_1 = (\varepsilon/2)(|\lambda| + 1)^{-1}$ e $\varepsilon_2 = (\varepsilon/2)(|\lambda| + 1)^{-1}$ como $lim u_n = a$,

$\exists n_1 : \forall\ \blacksquare p \in \mathbb{N}$, $p \geq n_1 \Rightarrow |u_p - a| < \varepsilon_1$;

e $lim v_n = b$,$\exists n_2$: $\quad\forall\blacksquare p \in \mathbb{N}, p \geq n_2 \Rightarrow |vp - b| < \varepsilon_2$;
supondo $n = sup\{n_1, n_2\}$; para $p \geq n$ teremos:
$|\lambda u_p + \mu v_p - (\lambda_a + \mu_b)| = |\lambda(u_p - a) + \mu(v_p - b)|$
$\leq |\lambda|\ |u_p - a| + |\mu|\ |v_p - b|$
$\leq \varepsilon/2[|\lambda| / (|\lambda| + 1) + |\mu| (|\mu| + 1)] < \varepsilon$
então acabamos de mostrar que: $\blacksquare\forall\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$
$p \geq n \Rightarrow |\lambda u_p + \mu v_p - (\lambda a + \mu b)| < \varepsilon\ \square$
Nota: tivemos que tomar como denominador $|\lambda| + 1$ em vez de $|\lambda|$ para evitar para que o denominador seja diferente de 0.
Ora, podemos concluir que $Cv(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ é um sub- espaço vectorial de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Demonstração de (2):
$\forall\blacksquare u, v \in Cv(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ e $lim u = a$; $\quad lim v = b\ lim u lim v = lim uv$
$\forall\ \varepsilon > 0$; $\varepsilon_1 = (\varepsilon/2)(|b| + 1)^{-1}$ e $\varepsilon_2 = (\varepsilon/2)(|a| + \varepsilon_1)^{-1}$
como $a = lim u \exists^1 n_1 \quad : \blacksquare\forall p \geq n_1$ temos $|u_p - a| < \varepsilon_1 \Rightarrow |u_p| < \varepsilon_1 +\ |a|$
e
como $b = lim v \Rightarrow \exists^{\blacksquare 1}\ n_2 \quad : \quad \forall\ p \geq n_2$ temos $|v_p - b| < \varepsilon_2$
para $p \geq n = sup\{n_1, n_2\}$ então temos:
$|u_p v_p - ab| = |u_p v_p - u_p b + u_p b - a_b|$
$= |u_p(v_p - b) + b(u_p - a)|$
$\leq |u_p|\ |v_p - b| + |b|\ |u_p - a|$
$\leq \varepsilon_1\ |b|\ +(\varepsilon 1 + |a|)\varepsilon_2$ (sendo $\varepsilon_2 = (\varepsilon/2)(|a| + \varepsilon 1)^{-1} \Rightarrow \varepsilon = 2\varepsilon_2(|a| + \varepsilon_1)$
$= [(|b| / 2)(|b| + 1)^{-1} + 1/2]\varepsilon < \varepsilon\ \square$

Proposição 7.4 *A potência de expoente natural de uma sucessão convergente é uma sucessão convergente*
$u_n \to a \Rightarrow (u_n)^p \to a^p, \forall p \in \mathbb{N}$

Demonstração:

Ficou demonstrado anteriormente que $limuv = limulimv$ então podem fazer o mesmo com a propriade que queremos demonstrar.

$lim(u_n)^p = lim(u_n \ldots\ u_n) = lim(u^n) \ldots\ lim(u^n) = a \ldots\ a = a^p$ □

Proposição 7.5 *O quociente de duas sucessões convergentes, não sendo a segunda um infinitésimo, é uma sucessão convergente*

$u_n \to a$ *e* $v_n \to b,\ b \neq 0 \Rightarrow u_n/v_n \to a/b$

Demonstração:

Sendo $a = limu$ e $b = limv$

$\varepsilon_1 = (1/2)\,|b| > 0,$■$\exists^1 n_1 :$■$\forall p \geq n_1 v_p \in]b - \varepsilon_1, b + \varepsilon_1[$, donde

$|v_p| > (1/2)\,|b|$

■ $\forall p \geq n_1$■$1/v_p$ e $1/\,|v_p| < 2/\,|b|$

Agora vamos mostrar que $lim(1/v) = 1/b$

Seja $\varepsilon > 0$;

$$5 \times 2^n; \left(\frac{5}{2}\right)^n; \sqrt{n} - 1; 2n - n^2$$

.

Suponhamos que $n = sup\{n_1, n_2\}$, para todo $p \geq n$, então existe e,

$$\left|\frac{1}{v_p} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|v_p| - b}{|b||v_p|} < \frac{|v_p| - b}{|b||b|} = \frac{2\varepsilon_2}{m^2} = \varepsilon$$

Logo

$$\frac{u_p}{v_p} = u_p \times \frac{1}{v_p}$$

■

Proposição 7.6 *A raiz de índice p de uma sucessão convergente é uma sucessão convergente*

$u_n \to a$*; para:*

p *par* $u_n \geq 0,$■$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (u_n)^{p/2} \to a^{p/2}$

p *impar* $u_n \geq 0,$■$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (u_n)^{p/2} \to a^{p/2}$

Demonstra-se da mesma forma que a potencia de u □

7.9 Exercícios de aplicação

1. Prove que as seguintes sucessões tendem para zero

a) $\left(\dfrac{2n-3}{n^2+1}\right)$

b) $u_n = \dfrac{1+2(-1)^n}{n}$

c) $v_n = \dfrac{1}{n^2-1}$

d) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

e) $x_n = \dfrac{\cos n\frac{\pi}{4}}{n}$

f) $t_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

2. Calcule o limite das seguintes sucessões:

a) $u_n = u_{n-1}^2$ e $u_0 = \frac{3}{4}$

b) $v_n = \sqrt{v_{n-1}}$ e $v_0 = \frac{1}{4}$

c) $w_n = \sqrt{w_{n-1}}$ e $w_0 = 4$

3. Demonstre que, usando o método de comparação, o limite das seguintes sucessões é um infinitésimo.

a) $u_n = \dfrac{1}{n^2-2}$;

b) $u_n = \dfrac{5}{2^n}$;

c) $u_n = -\dfrac{1}{1+\sqrt{n}}$;

d) $u_n = \dfrac{2}{(-3)^n}$;

e) $u_n = \dfrac{2n-3}{n^2-1}$;

f) $u_n = \dfrac{n\cos n\frac{\pi}{3} + \sin n\frac{\pi}{6}}{n^2-1}$;

g) $u_n = \dfrac{\cos n}{n}$;

h) $u_n = \dfrac{3^n}{2^{2n}}$

4. Seja $(u_n)_{n\geq 2}$: $u_n = \dfrac{3^n}{2^{2n}}$.

a) Mostre que: $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1}$

b) Demonstre que, se então $0 \leq \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1} \leq 2.$

c) Deduza que u_n converge para zero.

d) Prove que, para qualquer a positivo: $\dfrac{1}{\sqrt{n}-a} \to 0.$

e) Deduza que, para qualquer a positivo e p natural não nulo, a sucessão

$$\frac{1}{n^p - a} \to 0$$
.

5. Calcule:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n-3}{n+1}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-1}{5n-4}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}+\cos n\frac{\pi}{4}}{\sqrt{n}+1}$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$

6. Seja

$$u_n = \frac{n^2+n-1}{(n+2)^2}.$$

a) Prove que, para todo n natural: $n^2+n-2 < n^2+n-1 < n^2+2n$.

b) Deduza que:

$$\frac{n-1}{n+2} < u_n < \frac{n}{n+2}$$

c) Qual é o limite da sucessão dada?

d) Estude a convergência da sucessão

$$v_n = \frac{n^2+3n-\sin n}{(n-1)^2}.$$

7. Mostre que as sucessões seguintes são divergentes.

a) $u_n = n-\sqrt{n}$

b) $u_n = \dfrac{2n^2+5n-3}{n-1}$

c) $u_n = 5\times 2^n$

d) $u_n = n-5\sqrt{n}$

e) $u_n = \dfrac{3^n-1}{2}$

f) $u_n = \left(\dfrac{7}{3}\right)^n$

g) $u_n = 2^n - n$

h) $u_n = \dfrac{2n-1}{n+2}$

i) $u_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}\sqrt{n} + \dfrac{n^2-3}{n^2+4}$

j) $u_n = (2-\cos n)\dfrac{n^3-2n^2+3n}{(n-1)^2}$

8. Calcule o limite das seguintes sucessões :

a) $u_n = n - 2^n$

b) $u_n = 2n - n^2$

c) $u_n = \dfrac{-n^2-3n}{n+1}$

d) $u_n = 2^n - 3^n$

9. Qual é o limite das seguintes sucessões?

a)

$$n\sqrt{2}-2; \frac{1+n}{3+n^n}; -5n+2\sqrt{n}; \frac{n^2}{n(n-1)}-(0,8)^n; \frac{2n-1}{n^2-1}; 8-\left(\frac{1}{7}\right)^n; \frac{n^2+1}{2n}; n^2+nsen\left(n\frac{\pi}{4}\right); \frac{n}{n^4-3}$$

b) $\dfrac{2n^2-n+1}{n+3}; \dfrac{n^2+n-2}{3n^2+3}; 5+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n;$

c) $\dfrac{nsen\left(n\frac{\pi}{6}\right)}{n^2+1}; \dfrac{\sqrt{n^4+2}}{n^2+1}$

CAPÍTULO 8

Sucessões diversas

Além das sucessões aritméticas existem outros tipos de sucessões. Entretanto neste capítulo não vamos estudar todas elas mas sim, algumas conhecidas que também obedecem às regras da monotonia, limites e soma dos n primeiros termos.

Estas sucessões podem ser do tipo $u_n = f(n)$ ou $u_{n+1} = f(u_n)$. Esta ultima, deve ser definida num determinado intervalo I: f é definida em I, $f(I) \subset I$ e $u_1 \in I$.

8.1 Comparação com as sucessões geométricas e/ou aritméticas e estudo das mesmas

8.1.1 Sucessões do tipo $u_n = f(n)$

- Consideremos as sucessões u, v e w definidas sobre $\mathbb{N}$ tais que:

$$u_n = \frac{1}{n}, v_n = (-1)^n$$

e

$$w_n = (-1)^n \frac{1}{n}$$

a) Estude monotonia das sucessões dadas;

b) Mostre que v é uma sucessão periódica de período 2;

c) Será que as sucessões dadas são convergentes?

Resolução:

Vamos estudar apenas a sucessão u.

a) Seja f :$]0,+\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1/x$. Como f é uma função estritamente decrescente logo a sucessão u o é também.

c) a sucessão u converge para 0 (zero). Logo ela é convergente.

• Seja u uma sucessão definida em $\mathbb{N}$: $u_n = sin(\pi/2 + n\pi)$. Mostre que se trata duma sucessão periódica e divergente.

Resolução:

Se n for para então $n = 2p$ tal que $p \in \mathbb{N}$,

$u_n = sin(\pi/2 + 2p\pi) = sin\pi/2 = 1$.

Se n for impar, $n = 2p + 1$ tal que $p \in \mathbb{N}$,

$u_n = sin(\pi/2 + 2p\pi + \pi) = sin(3\pi/2) = -1$

Logo para todo o inteiro n, $u_n = (-1)^n$; donde $u_{n+2} = (-1)^{n+2} = (-1)^n = u_n$

Por isso, podemos concluir que u é uma sucessão periódica de período 2.

• Seja a sucessão v definida em $\mathbb{N}$ tal que:

$$v_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$

a) Mostre que, para todo o inteiro não nulo, $0 < v_n < 1$

b) Estude a sua monotonia.

c) Calcule o seu limite quando n tende para o infinito.

Resolução:

a) Seja n um inteiro natural não nulo. Entretanto, está claro que esta sucessão é positiva.

$v_n - 1 = n(n+2)/(n+1)^2 - 1 = -1/(n+1)^2 < 0$ ou seja $1/(n+1)^2 > 0$. Então, $0 < v_n < 1$.

b) Seja $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ onde $x \rightarrow x(x + 2)/(x + 1)^2$

Neste caso vamos estudar o sentido de variação de f, para tal temos que analisar o sinal da derivada da f:

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - x(x+2).2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2}{(x+1)^3} > 0.$$

A função f é estritamente crescente, logo, a sucessão dada o é também.

c) para todo n inteiro natural não nulo, tem para u_n a expressão

$$\frac{n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1+\frac{2}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}.$$

como

$$\lim_{n\to\infty} 1+\frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = 1,$$

a sucessão v converge para 1.

8.1.2 Sucessões do tipo $u_{n+1} = (au_n + b)^{1/2}$

Sucessões deste tipo podem ser monótona e ter limite. Por isso, apresentamos um exemplo a ser analisado:

a) Mostre que podemos definir em $\mathbb{N}$ uma sucessão definida por:

$$\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$$

b) Pelo método de recorrência, mostre que a sucessão dada é estritamente decrescente.

c) Mostre que 2 é minorante da sucessão.

d) Mostre que esta sucessão é uma sucessão convergente. Determine o seu limite.

Resolução:

a) Seja f definida no intervalo $I = [0, +\infty[$: $f(x) = \sqrt{2+x}$

Para todo $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$, logo $f(I) \subset I$. Como $u_1 = 7$ pertence a I. Portanto, a sucessão é definida.

b) $u_2 = \sqrt{2+7} = 3 < 7 \Rightarrow u_2 < u_1$

$n = p$

$u_p = \sqrt{2+u_p} < u_p + 1 = \sqrt{2+u_{p+1}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{2+u_p} < \sqrt{2+u_{p+1}}$

$\Leftrightarrow (2+u_p) < (2+u_{p+1})$

$\Leftrightarrow u_p < u_{p+1}$ logo podemos concluir que $u_n < u_{n+1}$

c) pela definição $u_n \geq 2$, $u_1 = 7 > 2$

d) $\sqrt{2+u_n} > 2 \Leftrightarrow (2+u_n) > 4 \Leftrightarrow \sqrt{2+u_n} > 4-2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_n > 2$ logo $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} > 2$

então podemos concluir que 2 é o minorante da sucessão dada.

c) Pelo teorema: toda sucessão decrescente e minorada é convergente.

Sendo decrescente e minorada podemos concluir que u é convergente. E ainda, podemos concluir que o seu limite l é positivo pois todos os seus termos são positivos.

$f(u_n) = (u_{n+1})$ converge para l, logo

$2 + l = l^2 \Leftrightarrow l^2 - l - 2 = 0 \Leftrightarrow l = -1$ ou $l = 2$

como l é positivo então $l = 2$. Logo u_n converge para 2.

8.1.3 Sucessões do tipo $u_{n+1} = (au_n + b)/(cu_n + d)$

a) Mostre que podemos definir em $\mathbb{N}$ uma sucessão definida por: $u_{n+1} = (u_n + 1)/(u_n + 2)$ e $u_1 = 0$.

b) Mostre que a sucessão dada é estritamente crescente de majorante 1

c) Caso a sucessão dada for convergente, calcule o seu limite.

Resolução:

a) Seja f uma função definida sobre $\mathbb{R}^+$ tal que $x \mapsto (x+1)/(x+2)$

$x \to 0$, $f(x) \to 0$ então $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$

como $u_1 = 0 \in \mathbb{R}^+$ logo a nossa sucessão é definida

b) $u_2 = (0+1)/(0+2) = 1/2 > 0 = u_1$

supondo $u_{n+1} > u_n$

$$U_{n+2} - U_{n+1} = \frac{U_{n+1} + 1}{U_{n+1} + 2} - \frac{U_n + 1}{U_n + 2} = \frac{U_{n+1} - U_n}{(U_{n+1} + 2)(U_n + 2)} > 0$$

logo $u_{n+2} > u_n$. O que mostra que a sucessão é estritamente crescente.

c) Seja $n \in \mathbb{N} : n > 1$

$$U_n - 1 = \frac{U_{n-1} + 1}{U_{n-1} + 2} - 1 = -\frac{1}{U_{n-1} + 2} < 0$$

e $u_1 = 0 < 1$. Logo 1 é majorante da sucessão dada.

Sendo estritamente crescente e majorada a sucessão dada é limitada. Como ela é composta de termos positivos então podemos concluir que o seu limite l é também positivo. Por outro lado, a função f admite como limite

$$\frac{l+1}{l+2}$$

em l, a sucessão $f(u_n)$ converge para

$$\frac{l+1}{l+2}$$

.

Ora $f(u_n) = (u_{n+1})$ converge para l.
Então, $\frac{1+1}{1+2} = l \Leftrightarrow l^2 + l - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$l = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \vee l = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

Como l é positivo então (u_n) converge para

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

.

CAPÍTULO 9

Séries

9.1 Definição

Definição 9.1 *É chamada série a uma sucessão ilimitada de termos*

$u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$

$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... =$

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{p=1}^{n} u_p \quad .$$

9.2 Propriedades

• Uma série é chamada série regular quando os seus termos podem ser deduzidas através dos seus termos precedentes obedecendo uma determinada lei. E, ela é irregular quando os termos sucedem duma forma qualquer.

• Diz-se que uma série é convergente quando a soma dos seus n primeiros termos tende para um limite bem determinado.

• Ela é divergente quando a soma dos seus n primeiros termos cresce indefinidamente. Neste caso podemos concluir que toda progressão geométrica decrescente e ilimitada forma uma série convergente pois, como tínhamos visto no capítulo anterior, o limite dessa soma é: onde u_1 é o primeiro termo da p.g. e q a sua razão. Entretanto, concluímos que toda progressão geométrica crescente e divergente e toda progressão aritmética crescente e ilimitada formam séries divergentes.

- $$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$

é chamada série harmónica. Esta soma dos seus termos não tem limite quando n é infinitamente grande. Logo esta série é divergente.

$$S_n = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots$$

9.3 Cálculo de S_n

Já sabemos como calcular a soma dos n primeiros termos das sucessões geométrica e aritméticas. Neste capítulo, vamos faze-lo através do exemplo que se segue:

Seja u definida em $\mathbb{N}$ tal que $u_n =$

$$\frac{1}{n(n+1)}$$

a) Mostra que existem dois reais tais que $u_n =$

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}$$

b) Deduza o cálculo de S_n e estude a sua convergência da sucessão S_n.

Resolução:

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} =$$

$= a(n+1) + b_n = 1(a+b)n + a = 1$

$a + b = 0$ e $a = 1$

$b = -1$ e $a = 1$

Então $u_n =$

$$\frac{1}{n(n+1)}$$

b) $S_n =$

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$S_n = 1$

Quando n for infinitamente grande

$$\frac{1}{n+1}$$

tende para zero. Logo, a sucessão S_n converge para 1.

9.4 Enquadramento duma série

Nem sempre é nos possível determinar logo a soma dos n primeiros termos duma sucessão. Por isso, às vezes, é necessário recorrer a uma sucessão idêntica à dada.

Exemplo 9.1 *Considere as sucessões u e v definidas em $\mathbb{N}$ por:*

$$\begin{cases} u_1 = 1 \wedge v_1 = 1, \\ \forall n \in N \wedge n > 1, u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}; \end{cases}$$

$$v_n = 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{(n-1).n}$$

a) *Encontre dois reais A e B tais que: para todo $n > 1$,*

$$\frac{1}{(n-1)n} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n}.$$

b) *Deduza que $v_n = 2 - \frac{1}{n}$, para todo $n > 1$.*

c) *Mostre que a série u é crescente e que para todo inteiro $n > 1$, $u_n < v_n < 2$. Deduza que u é convergente.*

Resolução:
a)

$$\frac{1}{(n-1)n}=\frac{A}{n-1}+\frac{B}{n}\Leftrightarrow\frac{1}{(n-1)n}=\frac{An+B(n-1)}{(n-1)n}\Leftrightarrow 1=An+B(n-1)$$
$$\Leftrightarrow 1=n(A+B)-B\Leftrightarrow A+B=0\wedge B=-1$$

$A = 1$ e $B =$ $\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}.$

b) $v_n =$

$$1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}$$

d) $u_{n+1} - u_n =$

$$u_n+\frac{1}{(n+1)^2}-u_n=\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{1}{n^2+2n+1}>0.$$

Logo, a sucessão u é crescente.

$$\forall k\in N:k>1,\frac{1}{k}<\frac{1}{k-1}\Rightarrow\frac{1}{k^2}<\frac{1}{(k-1)k}.$$

Logo,

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}$$

ou seja , $u_n < v_n$

$$2-\frac{1}{n}<2$$

$v_n =$

consequentemente $u_n < v_n < 2$. Disto podemos concluir que u_n é convergente e majorada por 2.

9.5 Relação entre progessões geométricas e outras sucessões

9.5.1 Sucessões do tipo $u_{n+1} = au_n + b$

Seja (u_n) definida por: $u_0 = \frac{3}{5}$ e

$$\forall n \in N, u_{n+1} = \frac{u_n - 3}{6};$$

e (v_n) definida por:

$$\forall n \in N, v_n = 5u_n + 3.$$

a) Mostre que a sucessão (v_n) é uma sucessão geométrica

b) Deduza as expressões de v_n e u_n em função de n.

c) Estude a convergência da sucessão u_n.

d) $S_n =$ e $S'_n =$ e determine os seus limites quando n tende para $+\infty$.

Resolução:

a)

$$u_{n+1} = \frac{u_n - 3}{6}; v_n = 5u_n + 3; v_{n+1} = 5u_{n+1} + 3$$

$$v_{n+1} = 5 \times \frac{u_n - 3}{6} + 3 = \frac{5u_n - 15 + 18}{6} = \frac{5u_n + 3}{6} = \frac{v_n}{6}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{6} v_n.$$

Logo a sucessão v_n é uma sucessão geométrica de razão $q = \frac{1}{6}$.

b)

$$v_0 = 5u_0 + 3 = 5 \times \frac{3}{5} + 3 = 6$$

$$v_1 = \frac{1}{6}(6)$$

$$v_2 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} 6$$

$$\vdots$$

$$v_n = \left(\frac{1}{6}\right)^n 6 = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

$$v_n = 5u_n + 3 \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n - 3}{5} = \frac{1}{5}\left[\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} - 3\right]$$

d)

$$q = \frac{1}{6} e -1 < \frac{1}{6} < 1.$$

Logo a sucessão converge para 0 (zero);

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = 0;$$

donde

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{5}\left[\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} - 3\right] = -\frac{3}{5}.$$

e)

$$S_n = 6\frac{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{36}{5}\left[1 - \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}\right]$$

$$S'_n = \sum_{n\geq o} u_n = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{5} v_n - \frac{3}{5} \right) = \frac{1}{5} \sum_{n\geq 0} v_n - \frac{3}{5} \sum_{n\geq 0} 1 = \frac{1}{5} \times \frac{36}{5} \left[1 - \left(\frac{1}{6} \right)^{n+1} \right] - (n+1)\frac{3}{5}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{36}{5} - \frac{36}{5} \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{6} \right)^{n+1} = \frac{36}{5}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S'_n = \frac{36}{25} - \infty = -\infty$$

Assim, concluímos que a séria S_n é convergente e a S'_n é divergente.

9.5.2 Sucessões do tipo $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

Seja (u_n) a sucessão definida por:

$u_0 = 1$; $u_1 = 2$ e para todo n de $\mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3/2u_{n+1}\ -1/2u_n$

e (v_n) definida por: $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a) Mostre que a sucessão (v_n) é uma sucessão geométrica, e calcule o termo geral de v_n em função de n.

b) Deduza a expressão de u_n em função de n.

c) Determine o limite da sucessão u_n.

Resolução

a) $v_n = u_{n+1} - u_n v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = 3/2u_{n+1} - 1/2u_n - u_{n+1}$
$= 1/2u_{n+1} - 1/2u_n = 1/2(u_{n+1} - u_n) = 1/2v_n$.

A sucessão v_n é uma sucessão geométrica de razão $1/2$.

Pela fórmula geral de sucessões geométricas temos:

$v_n = v_0(1/2)^n = (u_1 - u_0)(1/2)^n = (2-1)(1/2)^n = (1/2)^n$.

b) $u_{n+2} = 3/2u_{n+1} - 1/2\ u_n$ é uma sucessão semelhante a uma série, e, é idêntica à sucessão v_n. Por isso, vamos primeiro calcular a soma dos n primeiros termos da sucessão v_n: tem-se para S_n a expressão

$$v_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right] = 2 - \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

Também podemos obter essa soma da seguinte forma:

$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n = u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + ... + u_{n+1} - u_n$
$= -u_0 + u_{n+1} = u_{n+1} - u_0$
$S_n = u_{n+1} - u_0$
$u_{n+1} = S_n + u_0$
$u_{n+1} = 1 + 2 - (1/2)^n$
$u_{n+1} = 3 - (1/2)^n$
$u_n = 3 - (1/2)^{n-1}$
c) Como $-1 < 1/2 < 1$,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0.$$

Logo, $u_n = 3$.

9.5.3 Sucessões do tipo $u_n = \frac{au_n+b}{cu_n+d}$

Seja u_n uma sucessão definida por:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{4} \\ \forall n \in N, u_{n+1} = \frac{2+3u_n}{4+u_n} \end{cases}$$

a) Mostre, por recorrência, que

$$\forall n \in N, u_n \neq 1.$$

b) Seja $v_n =$

$$\frac{2+u_n}{1-u_n}, \forall n \in N.$$

Mostre que v_n é uma sucessão geométrica de razão q, primeiro termo v_1 e termo geral v_n. Será esta sucessão convergente?

c) Estude a convergência de u_n.

Resolução

a) $u_1 = \frac{1}{4} \neq 1$
$u_2 = \frac{11}{17} \neq 1$

Suponhamos que $u_n \neq 1$. Logo, para $u_{n+1} - 1$ tem-se

$$\frac{2+3u_n}{4+u_n} - 1 = \frac{2+3u_n - 4 - u_n}{4+u_n} = \frac{-2+2u_n}{4+u_n} = \frac{2(u_n - 1)}{4+u_n} \neq 0$$

O que mostra, por recorrência, que

$$\forall n \in N, u_n \neq 1.$$

b) Para v_n tem-se

$$\frac{2+u_n}{1-u_n} \Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{2+u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \frac{2+\dfrac{2+3u_n}{4+u_n}}{1-\dfrac{2+3u_n}{4+u_n}} = \frac{\dfrac{8+2u_n+2+3u_n}{4+u_n}}{\dfrac{4+u_n-2-3u_n}{4+u_n}} =$$

o que equivale a

$$\frac{10+5u_n}{2-2u_n} = \frac{5}{2} \times \frac{2+u_n}{1-u_n} = \frac{5}{2} v_n$$

Então v_n é uma sucessão geométrica de razão 5/2. Para v_1 tem-se

$$\frac{2+u_1}{1-u_1} = \frac{2+\dfrac{1}{4}}{1-\dfrac{1}{4}} = \frac{9}{4} \times \frac{4}{3} = 3$$

$\Leftrightarrow v_n = 3(5/2)^{n-1}$. Como $5/2 > 1$,

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n = +\infty.$$

Concluindo, a sucessão v_n é divergente.

c) Como conhecemos v_n e seu limite, vamos calcular u_n em função de v_n. Tem-se para v_n a expressão

$$\frac{2+u_n}{1-u_n} \Leftrightarrow v_n(1-u_n)=2+u_n \Leftrightarrow v_n - v_n u_n = 2+u_n$$
$$\Leftrightarrow -v_n u_n - u_n = 2 - v_n$$
$$\Leftrightarrow u_n(v_n+1) = v_n - 2$$
$$\Leftrightarrow u_n = \frac{v_n - 2}{v_n + 1}$$

Neste caso o limite de u_n, quando n é infinitamente grande, é $\frac{\infty}{\infty}$, o que é uma indeterminação. Por isso, vamos recorrer a uma outra forma de o calcular ao colocar v_n em evidência:

$$u_n = \frac{v_n\left(1-\frac{2}{v_n}\right)}{v_n\left(1+\frac{1}{v_n}\right)} = \frac{\left(1-\frac{2}{v_n}\right)}{\left(1+\frac{1}{v_n}\right)}$$

Como

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty, \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{v_n} = 0, \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{v_n} = 0$$

então,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1-\frac{2}{v_n}\right)}{\left(1+\frac{1}{v_n}\right)} = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

9.5.4 Sucessões do tipo $u_{n+}1 = \sqrt{au_n + b}$

Seja (u_n) definida por:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in N, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$$

a) Mostre que u_n tem como majorante 2.
b) Mostre que

$$\forall n \in N, 0 < 2 - u_{n+1} < \frac{2 - u_n}{2}.$$

E, deduza que,

$$\forall n \in N, 0 < 2 - u_{n+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Mostre que a sucessão $(2 - u_n)$ converge para 0 e determine o limite de u_n.

Resolução:

a)

$u_0 = 0 < 2$

$u_1 = \sqrt{2} < 2$

:

Suponhamos que $u_n < 2$ é verdadeira. Logo:

$$u_n + 2 < 2 + 2 \Leftrightarrow 2 + u_n < 4 \Leftrightarrow \sqrt{2 + u_n} < \sqrt{4} \Leftrightarrow \sqrt{2 + u_n} < 2 \Leftrightarrow u_{n+1} < 2.$$

O que mostra, por recorrência, que para todo n de $\mathbb{N}$, $u_n < 2$.

b)

$$2 - u_{n+1} = 2 - \sqrt{2 + u_n} = \frac{\left(2 - \sqrt{2 + u_n}\right)\left(2 + \sqrt{2 + u_n}\right)}{\left(2 + \sqrt{2 + u_n}\right)} = \frac{4 - 2 - u_n}{\left(2 + \sqrt{2 + u_n}\right)} = \frac{2 - u_n}{2 + \sqrt{2 + u_n}}$$

como

$$2 + \sqrt{2 + u_n} > 2,$$

então:

$$\frac{1}{2+\sqrt{2+u_n}} < \frac{1}{2}.$$

Como, $2 - u_{n+}1 > 0$, então podemos multiplicar os dois membros da inequação por $2 - u_n$

$$\frac{2-u_n}{2+\sqrt{2+u_n}} < \frac{2-u_n}{2} \Leftrightarrow 0 < 2-u_{n+1} < \frac{2-u_n}{2}.$$

$$\vdots$$

$$\Leftrightarrow 0 < 2-u_1 < \frac{2-u_0}{2}$$

Multipliquemos membro a membro as $n + 1$ inequações;

$$0 < (2-u_{n+1})(2-u_n)\ldots\ldots(2-u_1) < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(2-u_n)\ldots\ldots(2-u_1)$$

e, dividimos por

$$(2-u_n)\ldots\ldots(2-u_1),$$

maior que zero,

$$0 < 2-u_{n+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(2-u_0) \Leftrightarrow 0 < 2-u_{n+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(2-0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}.$$

Como $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ então

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

Donde, pelo enquadramento,

$$\lim_{n\to+\infty}(2-u_n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 2.$$

9.6 Estudo de duas sucessões conjuntas

Sejam u_n e v_n duas sucessões definidas em $\mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_1=1, v_1=12 \\ \forall n \in N, u_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}, v_{n+1}=\frac{u_n+3v_n}{4} \end{cases}$$

a) Sabendo que $w_n = v_n - u_n$, definida em $\mathbb{N}$, mostre que w_n é uma sucessão geométrica. Exprima w_n em função de n; Estude-a e determine o seu limite.

b) Demonstre que u_n é crescente e v_n decrescente. Mostre que: para todo n de $\mathbb{N}$, u$_1$ $\leq u_n \leq v_{n \leq} v_1$. E, deduza que as sucessões u_n e v_n são convergentes e que têm o mesmo limite.

c) Seja (t_n) uma sucessão definida por $t_n = 3u_n + 8v_n$. Mostre que a sucessão tn é constante. Deduza o limite de u_n e v_n.

Resolução:

a) $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1}$ o que é igual a

$$\frac{u_n+2v_n}{3} - \frac{u_n+3v_n}{4}$$

que por sua vez é igual a

$$\frac{3u_n + 9v_n - 4u_n - 8v_n}{12} = \frac{-u_n + v_n}{12} = \frac{1}{12}(v_n - u_n) = \frac{1}{12} w_n$$

Logo w_n é uma sucessão geométrica de razão 1/12.

$$\forall n \in N, w_n = w_1\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} = (v_1 - u_1)\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} = (12-1)\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} = 11\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}$$

$w_n > 0$ o que nos induz a concluir que ela é crescente. Como $-1 < 1/12 < 1$, então

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} = 0$$

então $lim_{n\to\infty} w_n = 0$.

b) Tem-se:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+2v_n}{3}-u_n=\frac{u_n+2v_n-3u_n}{3}=\frac{2v_n-2u_n}{3}=\frac{2}{3}(v_n-u_n)=\frac{2}{3}w_n>0$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3v_n}{4}-v_n=\frac{u_n+3v_n-4v_n}{4}=\frac{u_n-v_n}{4}=-\frac{v_n-u_n}{4}=-\frac{1}{4}w_n<0$$

A sucessão u_n é crescente e a v_n é decrescente.

9.7 Exercícios de aplicação

1. Seja

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{1}{u_n}\right)$$

e $u_0=\frac{1}{2}$.

a) Mostre que u_n é composto por termos positivos.

b) Seja

$$w_n=\frac{-1+u_n}{1+u_n},\forall n\in N$$

.

Que relação existe entre w_{n+1} e w_n. Calcule $lim_{n\to\infty}w_n$ e $lim_{n\to\infty}u_n$.

2. Sejam $a\in\mathbb{R}$, u_n tal que:

$$u_0=0;u_1=1\ u_{n+1}=au_n+(1-a)u_{n-1}\ v_n=u_{n+1}-u_n$$

e un: e .

a) Prove que v_n é uma sucessão geométrica. Calcule o seu termo geral em função de a e de n.

b) Deduza u_n em função de a e de n.

c) Quando u_n converge?

3. Seja $u_1=2$ e

$$u_n=\frac{1}{4}u_{n-1}+1$$

.

a) Determine

$$\alpha\in R:v_n=u_n+\alpha$$

e $n \geq 0$ de modo que v_n seja uma sucessão geométrica.

b) Mostre que u_n é convergente e precise o seu limite.

c) Calcule

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

em função de n. Será s_n convergente?

4. Seja α um real positivo. Demonstre que para qualquer n maior do que 2 tem-se:

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2$$

Mostre que

$$\forall n \neq 0; (1+\alpha)^n > \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2$$

b) Mostre que se

$$a > 1 \Rightarrow u_n = \frac{a^n}{n} \to \infty$$

c) Mostre que

$$v_n = \sqrt[n]{n}$$

é convergente.

5.1. Prove que para $\alpha \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha \, .$$

5.2. Prove que para

$$k, n \in N : n \neq 0, k \neq 0; \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k < 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2} \, .$$

5.3. Prove que

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

é crescente. Determine o seu domínio.

6.a) Calcule os vinte primeiros termos de a_n e b_n onde $a_n = \frac{1}{2n}$ e $b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

b) Calcule

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{10^k} : k \in \{1,2,3,4,5,6\}$$

e encontre o menor n que satisfaz a condição inicial.

c) Apresente os resultados num quadro e depois represente os pontos (n, k) num plano ortonormado.

d) Repita as alíneas anteriores considerando

$$b_n < \frac{1}{10^k}.$$

CAPÍTULO 10

Complementos sobre sucessões

10.1 Representação dos números reais

Os números racionais podem ser representadas através de fracções (pares de inteiros). Eis a representação decimal de números reais:

Definição 10.1 *Chama-se dizima finita uma expressão da forma $a_0, a_1a_2...a_n$ onde a_0 é um inteiro e são números naturais maiores ou iguais a 1 e menores ou iguais a 9.*

Por definição tem-se:

$$a_0, a_1 a_2 ... a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_n}{10^n}$$

assim uma dizima finita representa um numero racional.

E dizima infinita

$$I_0 = \left[a_0 ; a_0 + \frac{1}{10^0} \right], I_1 = \left[a_0, a_1 ; a_0, a_1 + \frac{1}{10^1} \right], ..., I_n = \left[a_0, a_1 ... a_n ; a_0, a_1 ... a_n + \frac{1}{10^n} \right]$$

onde é substituído o intervalo $[a, b]$ por $[a; b]$. Tem –se os intervalos I_n incluídos um dentro do outro por ordem crescente de n.

Obs: $[x]$ é parte inteira de x não superior ao numero racional x.

10.2 Sucessões de Cauchy

Definição 10.2 *Uma sucessão u é de Cauchy se, e só se*

$$\forall \varepsilon > o, \exists n \in N, \forall (p,q) \in N^2 : (p \geq n \wedge q \geq n) \Rightarrow \left| u_p - u_q \right| < \varepsilon$$

Teorema 10.1 *Toda sucessão convergente é de Cauchy.*

Demonstração:
Seja $l = lim u_n$. Uma vez que :
a)

$$\left| u_p - u_q \right| = \left| u_p - l + l - u_q \right| \leq \left| u_p - l \right| + \left| u_q - l \right|$$

b) fixando $\varepsilon > 0$ tem-se

$$\left| u_q - l \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para $n \geq p$, e resulta

$$\left| u_p - u_q \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para $n \geq p$ e $m \geq p$, o que mostra que u_n é de Cauchy.□

Teorema 10.2 *Toda sucessão de Cauchy em $\mathbb{R}$ é convergente.*

Demonstração:
Vamos fazer esta demonstração provando previamente duas proposições:
a) Toda a sucessão de Cauchy é limitada em $\mathbb{R}$
u_n é de Cauchy, fazendo na definição $\varepsilon = 1$ ficamos a saber que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| u_p - u_q \right| < 1$$

para $m \geq p, n \geq p$ e portanto para $p \geq m$, isto é, para

$$u_p \in \left] u_m - 1, u_m + 1 \right[$$

Assim, fora deste intervalo, só poderão estar um numero finito de termos da sucessão; portanto, o conjunto destes termos é limitado.

b) Se u_n é de Cauchy e é subsucessão convergente, então u_n é convergente.

Seja u_n a subsucessão convergente e l o seu limite. Fixando $\varepsilon > 0$, tem-se, m virtude de $u_n \to l$, a existência de $r \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|u_m - l\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para $n \geq r$ e também, devido a u_n ser de Cauchy, a existência de

$$p \in N : \left|u_q - u_i\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para

$$q \geq p \wedge i \geq p.$$

Escolhendo, um $a \in \mathbb{N}, a \geq m$, tem-se

$$\left|u_a - l\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e também

$$\left|u_q - u_a\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para $q \geq p$. Assim,

$$\left|u_q - l\right| = \left|u_q - u_a + u_i - l\right| \leq \left|u_q - u_a\right| + \left|u_a - l\right| < \varepsilon$$

para $q \geq p$, que mostra que $u_q \to l$ quando q for infinitamente grande. Logo fica provado o teorema.□

10.3 Numero de ouro

Definição 10.3 *Um numero de ouro é um numero x cuja composição em fracção continua è tal que:*

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}}$$

onde $a_n = 1$.

10.4 Exponencial

Teorema 10.3 *Se $n \to \infty$, tem-se*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$$

Demonstração:□

10.5 Series e Produtos infinitos

Seja uma sucessão de números reais. A partir desta pode-se definir duas novas sucessões:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

(soma dos n primeiros termos da sucessão u) e

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$$

(produto dos n primeiros termos da sucessão u). Ao estudo da sucessão S dá-se o nome de estudo da série e a de P estudo do produto infinito.

Quando a sucessão S converge diz-se que a serie dada é convergente e nota-se:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \lim_n \left(\sum_{k=0}^{n} u_k \right)$$

Exemplo 10.1 *A série*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k$$

é convergente se $|x| < 1$ e divergente se $|x| \geq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Ora, o módulo de x é menor do que 1, o limite de x^{n+1} é igual a zero. E,

$$S_n = \frac{1}{1-x}.$$

A série $\sum_{k=0}^{n} u_k$, também é chamada, série numérica. Ela pode ser divergente ou convergente e ela o é quando o limite da série existe. E, nota-se:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S.$$

$R_N = S - S_N$ é o resto de ordem N da séria dada.

Teorema 10.4 *Se*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k < 1,$$

então a série é convergente e

$$R_N \leq \frac{u_{N+1}}{1-k}.$$

Definição 10.4 *A série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ é absolutamente convergente quando $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$ for convergente, e semi-convergente quando ela não for absolutamente convergente.*

Teorema 10.5 (Cauchy) *Uma dada série é convergente se, e só se,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in N, \forall p \geq n, \forall q \geq p : \left| \sum_{n=p}^{q} u_n \right| < \varepsilon.\square$$

Algumas séries de referência:

- Série harmónica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\begin{cases}\textit{divergente}, \alpha\leq 1\\ \textit{convergente}, \alpha<1\end{cases}$$

Figura 10.1:

é divergente.

- Série geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\begin{cases}\textit{divergente}, |a|\geq 1\\ =\frac{1}{1-a}, |a|<1\end{cases}$$

- Série de Riemann ($\alpha \in \mathbb{R}^+$) :

10.6 Introdução ao logaritmo

Neste capítulo não vamos trabalhar o logaritmo. Mas sim vamos, através da relação entre a progressão geométrica e a aritmética, tentar compreender o sistema de logaritmo. Também vamos apresentar algumas regras.

10.6.1 Definição e principio

Seja a seguinte progressão geométrica $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ crescente de razão q com $u_1 = 1$ e a aritmética, também crescente, de razão r cujo $v_1 = 0$. Consideremos log (função logarítmica) uma função bijectiva :

$$\begin{aligned} log &: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ u_n &\mapsto v_n \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Isto significa que cada termo da sucessão aritmética é o logaritmo do termo correspondente da progressão geométrica.

Exemplo 10.2 *$log(q^2) = 2r$.*

Consideremos ainda as sucessões $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ incluindo os seus respectivos inversos no conjunto. Sendo assim teremos:

$$\frac{1}{q^n}:......:\frac{1}{q^3}:\frac{1}{q^2}:\frac{1}{q}:1:q:q^2:......:q^n$$

e $-nr... - 3r. - 2r. - r.0.r.2r...nr$.

Logo, a partir da definição dada, deduzimos que o logaritmo dum número menor do que 1 é um número negativo.

Às razões "r" e "q" podemos atribuir uma infinidade de números. Logo, concluímos que existe uma infinidade de sistema de logaritmo. Entretanto, quando é dado q e r o sistema é determinado.

Definição 10.5 *Chama-se base dum sistema de logaritmo ao número que tem como logaritmo 1.*

Exemplo 10.3 *Se $log(2) = 1$ então estamos perante um sistema de logaritmo de base 2 e é representada da seguinte forma: log_2.*

10.6.2 Teorema

Teorema 10.6 *Podemos, numa sucessão geométrica, inserir n meios geométricos para que a diferença entre dois termos consecutivos seja o menor possível.*

Exercício 10.1 *Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : q > 0$ e $u_1 = 1$. Insira $m - 1$ meios entre $a = q^n$ e $b = q^{n+1}$ dois termos consecutivos .*

Resolução:

$b = ap^m \Leftrightarrow p^m = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \sqrt[m]{\frac{b}{a}} = \sqrt[m]{q^m}$. sendo p a razão da subsucessão formada pelos meios geométricos.

Demonstração do teorema:

Ao considerarmos 2 termos consecutivos da subsucessão anteriormente encontrada teremos:

$q^n p^{k+1} - q^n p^k = q^n(p^{k+1} - p^k) = q^n p^k(p-1) = q^n \sqrt[m]{q^k}\left(\sqrt[m]{q} - 1\right)$

Quando m for infinitamente grande o $limq^n \sqrt[m]{q^k}\left(\sqrt[m]{q} - 1\right) = 0$. Logo, fica demonstrado o teorema.□

Exercício 10.2 *Dadas duas sucessões: p.a de $u_1 = 0$ e razão $r = 3$ e p.g de $v_1 = 1$ e razão $q = 2$. Sabendo que estas formam um sistema de logaritmo encontre a sua base.*

Resolução:

Pela definição de base dum sistema de logaritmo termos que encontrar os meios geométricos situados entre $v_1 = 1$ e $v_2 = 2$ pois 1 está inserido entre $u_1 = 0$ e $u_2 = 3$. Assim sendo teremos a seguinte subsucessão aritmética:

0.1.2.3 de razão 1, e entre $u_1 = 0$ e $u_2 = 3$ há dois meios aritméticos. Por isso, teremos que inserir entre $v_1 = 1$ e $v_2 = 2$ dois meios geométricos.

p: é a razão da subsucessão formada pelos meios geométricos:

$$p = \sqrt[2+1]{2} = \sqrt[3]{2}$$

A nossa subsucessão geométrica seria então: $1 : \sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{2}^2 : \sqrt[3]{2}^3 = 2$

Logo $log(\sqrt[3]{2}) = 1$. O que nos induz a concluir que se trata dum sistema de logaritmo de base $\sqrt[3]{2}$.

Teorema 10.7 *Se ao inserirmos $m-1$ ou $m'-1$ meios, conseguirmos que o mesmo número faça parte duma p.g, encontraremos nos dois casos o mesmo logaritmo para esse número.*

Demonstração:

Sejam as duas progressões $1, q, q^2, q^3, ..., q^n$ e $0, r, 2r, 3r, ..., nr$.

Ao inserirmos $m-1$ meios entre cada termo das duas progressões; os termos $(k+1)$ seriam respectivamente $\left(\sqrt[m]{q}\right)^k$ e $\frac{r}{m}k$.

e, ao inserirmos $m'-1$ meios, os termos $k'+1$ seriam $\left(\sqrt[m']{q}\right)^{k'}$ e $\frac{r}{m'}k'$.

Pela hipótese:$\left(\sqrt[m]{q}\right)^k = \left(\sqrt[m']{q}\right)^{k'}$ e $\frac{r}{m}k = \frac{r}{m'}k' \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{m} = \frac{k'}{m'} \Leftrightarrow km' = k'm$$

ao elevarmos $\left(\sqrt[m]{q}\right)^k = \left(\sqrt[m']{q}\right)^{k'}$ a mm' obteremos a seguinte equação:

$qkm' = qk'm \Leftrightarrow km' = k'm$. Assim, fica demonstrado o teorema.$\square$

10.6.3 Propriedades

Seja $a = q^k$ e $b = q^p$ com $q > 0$ e $k, p \in \mathbb{N}$

(i) $log(ab) = log(a) + log(b)$

Dem. $log(ab) = log(q^k q^p) = log(q^{p+k}) =$

$= (p+k)r = pr + kr = log(q^k) + log(q^p) =$

$= log(a) + log(b)$

(ii) $log(a/b) = log(a) - log(b)$

Dem. $log(a/b) = log(q^k/q^p) = log(q^k q^{-p}) =$

$= kr - pr = log(q^k) - log(q^p) = log(a) - log(b)$

(iii) $log(am) = mlog(a)$

Dem. $log(am) = log(a) + log(a) + \ldots\ + log(a) = mlog(a)$

(iv)

$$\log\left(\sqrt[m]{a}\right) = \frac{\log(a)}{m}$$

Dem.

$$\log\left(\sqrt[m]{a}\right) = \log\left(a^{\frac{1}{m}}\right) = \frac{1}{m}\log(a) = \frac{\log(a)}{m}$$

(v) $log(am/k) = \frac{m}{k}\log a$
(vi) Se $a = b$ então $log(a) = log(b) : a, b > 0$
(vii) Se $a > b$ então $log(a) > log(b) : a, b > 0$
(viii) Para $a, b > 0$ então $log(a) - log(b)$ e $a - b$ tem o mesmo sinal.
Caso particular: se $a > 0$, $log(a)$ e $a - 1$ têm o mesmo sinal.

10.6.4 Logaritmos vulgares

Os sistemas de logaritmos mais usados são: o decimal e o natural cujas bases são 10 e número de nepper representado pela letra $e = 2,718.$E, são representados por log e ln respectivamente.

Nota 10.1 *Nalguns casos quando se fala de log devemos considerar o sistema de logaritmo natural.*

As propriedades são as mesmas que as anteriormente referidas.

- Relação entre o logaritmo decimal e o neperiano

$$log(a) = \frac{\ln a}{\ln 10}$$

CAPÍTULO 11

Conclusão e recomendações

Sabendo que as sucessões tem uma grande influência no calculo dos valores aproximados, no calculo estatístico, no calculo financeiro, bem como noutras disciplinas onde são aplicadas séries e sucessões, aconselha-se aos professores e alunos que utilizem este manual como material de apoio do ensino da matemática, para poderem, no futuro, contribuir no desenvolvimento da sociedade onde se encontram inseridos.

Ao longo do trabalho apresentou-se enigmas, que de certeza no final da leitura, poderão ser resolvidos, exercícios resolvidos que poderão servir de guia na resolução dos propostos, falou-se na introdução dos logaritmos (relação entre a progressão geométrica e a aritmética) afim de estimular os alunos a compreenderem a função logarítmica, matéria a ser estudada posteriormente, e nalgumas sucessões consideradas úteis no conjunto do números reais. Não foi possível abordar tudo porque trata-se duma matéria muito vasta onde a cada dia o indivíduo descobre, adquire novos conhecimentos e tenta encontrar uma nova aplicação dela.

A realização deste documento nos permitiu, além de estudar compreender as sucessões, aplicar conhecimentos da didáctica matemática na apresentação dos exercícios resolvidos, nas demonstrações e permitirá a sua aplicação na resolução dos exercícios por resolver e enigmas cujo objectivo é induzir o aluno ao raciocínio lógico matemático.

No trabalho apresentou-se e resolveu-se alguns exercícios para que estes possam servir de modelo na resolução dos propostos e de outros que venham a surgir no dia a dia. Pois, como se disse o objectivo da matemática é formar um indivíduo com perspectivas do futuro.

Também, o uso deste manual pode contribuir na escolha da profissão de que carece esta sociedade. Tal carência, as vezes, surge devido ao insucesso escolar de que muitas vezes é originado pela falha no ensino da matemática. Isto é, muitas vezes um indivíduo escolhe uma outra profissão pelo facto de ser resultante ou de nela ter que aplicar a matemática.

Solicita-se uma breve leitura deste documento, a resolução dos exercícios propostos e dos enigmas porque esta sociedade de hoje exige dos indivíduos nelas inseridas a satisfação das suas necessidades, a capacidade de enfrentarem e preverem problemas, tendo em conta principalmente a sua evolução.

Algumas recomendações

De acordo com tudo o que foi visto ao longo do trabalho e com as conclusões tiradas, gostaria de fazer algumas recomendações que poderão ajudar na melhoria da aprendizagem matemática:

- Que as escolas, os professores e os alunos introduzam concursos de resolução de enigmas nas escolas e/ou entre escolas.
- Que relacione cada matéria à realidade. Isto é, mostrar a sua importância num determinado emprego e a sua aplicação noutras disciplinas.
- Que, antes de começar uma nova matéria, se lance desafios.
- Que se tente introduzir um pouco de História da matemática ao longo do ensino.
- Que os professores, além de manuais e fichas de exercícios, consultem livros de história da matemática, enigmas motivadores complementando o manual em uso.

Bibliografia

[1] **Bibliografia**

- GAUTIER, C.; THIERCÉ, C., Mathématiques, Analyse, 1re S et E, Hachette, Lycées
- LEHMAN, E. , Mathématiques pour l'étudiant de 1ére année, analyse, Belin
- Sem autor, Cours d'algèbre élémentaire, livro
- GAUTIER, C. ; GIRARD, G. ; GEREL, D. ; THIERCÉ, C. e WARUSFEL, A., ALEPH1, Allgèbre/Geométrie, 1ére CDE, Hachette
- SARRICO, Carlos, Análise matemática, Leituras e exercícios, Gradiva
- SWKOWSKI, Earl W., Calculus with analytic geometry, 2^o edition, Prindle, weber & schmidt
- BOLT; Brian, O prazer da matemática, a caixa de Pandora da matemática, Gradiva
- BOLT; Brian, O prazer da matemática, Actividades matemáticas, Gradiva
- EBBINGHAUS, H. – D. ; HERMES, H. E colectivo, Graduate texts in mathematics, readings in mathematics, Numbers, Spinger

Dado	Incógnita	Fórmula
U_1 r n	U_n	$U_n = u_1 + (n-1)r$
U_1 r S		$U_n = -r/2 \pm \sqrt{[2rs + (a - r/2)2]}$
U_1 n S		$U_n = 2S/n - u_1$
S n r		$U_n = S/n + (n-1)r/2$
U_1 r n	S	$S = n/2[2u_1 + (n-1)r]$
U_1 r u_n		$S = (u_1 + u_n)/2 + (u_n^2 - u_1^2)/(2r)$
U_1 n u_n		$S = (u_1 + u_n)n/2$
U_n r u_n		$S = n[2u_n - (n-1)r]/2$
U_n r n	U_1	$U_1 = u_n - (n-1)r/2$
S r n		$U_1 = s/n - (n-1)\, r/2$
S r n		$U_1 = r/2 \pm \sqrt{[(n + r/2)^2 - 2rS]}$
S u_n n		$U_1 = 2S/n - u_n$
U_1 n u_n	r	$r = (u_n - u_1)/(n-1)$
U_1 n S		$r = 2(S - n * u_1)/[n(n-1)]$
U_1 u_n S		$r = (u_n^2 - u_1^2)/(2S - u_1 - u_n)$
S u_n n		$r = 2(n * u_n - S)/[n(n-1)]$
U_1 r u_n	n	$n = (u_n - u_1)/r + 1$
U_1 r S		$n = [r - 2u_1 \pm [2u_1 - r)^2 + 8rS]^{1/2}$
U_1 u_n S		$n = 2S/(u_1 + u_n)$
S u_n r		$n = u_n/r + 1/2 \pm [(2u_n + r)^2 - 8rS]^{1/2} /2r$

Dado	Incógnita	Fórmula
U_1 q n		$U_n = u_1\, q^{n-1}$
U_1 q S	U_n	$U_n = [u_1 + (q-1)S]/q$
U_1 n S		$U_n\,(S-u_n)^{n-1} - u_1(S-u_1)^{n-1} = 0$
S n q		$U_n = (q-1)Sq^{n-1}/(q^n - 1)$
U_1 q n		$S = u_1\,(q^n - 1)/(q-1)$
U_1 q u_n		$S = (qu_n - u_1)/(q-1)$
U_1 n u_n	S	$S = [u_n^{\,n/(n-1)} - u_1^{\,n/(n-1)}]/[u_n^{\,1/(n-1)} - u_1^{\,1/(n-1)}]$
n q u_n		$S = [u_n(q^n - 1)]/[(q-1)q^{n-1}]$
U_n q n		$U_1 = u_n/q^{n-1}$
S q n	U_1	$U_1 = (q-1)S/(q^n - 1)$
S u_n n		$U_1 = qu_n - (q-1)S$
S u_n n		$U_1(S-u_1)^{n-1} - u_n(S-u_n)^{n-1} = 0$
U_1 n u_n		$q = (u_n/u_1)^{n-1}$
U_1 n S	q	$q^n - sq/u_1 + (s-u_1)/u_1 = 0$
U_1 u_n S		$q = (S-u_1)/(S-u_n)$
S u_n n		$q^n - sq^{n-1}/(S-u_n) + u_n/(S-u_n) = 0$